
误差理论与测量平差基础

主讲： 戴华阳 教授
中国矿业大学（北京）

第二章 误差与协方差传播

§ 2-1 观测误差传播规律

§ 2-2 协方差传播规律

§ 2-3 协方差传播律的应用

§ 2-4 权与定权的常用方法

§ 2-5 协因数和协因数传播律

§ 2-6 方差的估算

§ 2-7 系统误差的传播



第一章：偶然误差、观测值的正态随机变量化

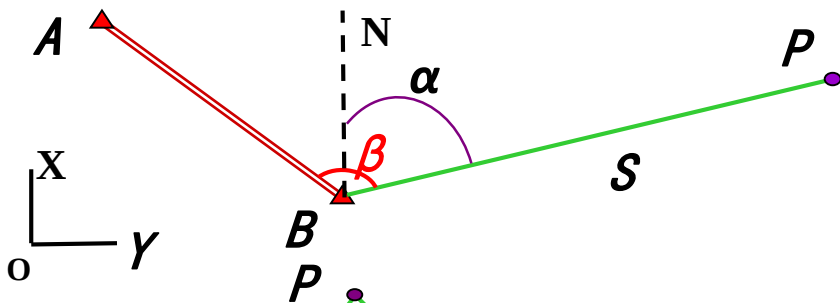
分布参数（数学期望、精度、相关性）

第二章：观测值函数的精度、相关性

- 1、误差的传播
- 2、泰勒公式及其应用
- 3、函数线性化-近似化

背景：观测值函数的误差、中误差问题

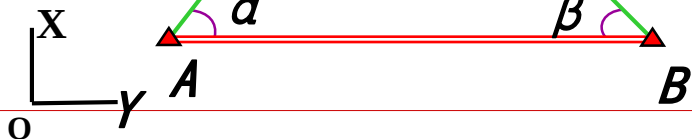
直接观测值，如水平角 β 和边长 S ，由此确定点 $P (X_p, Y_p)$ 坐标为间接观测值，P点坐标的误差、中误差如何确定？-误差、协方差的传播问题



$$\alpha = \alpha_{BP} = \alpha_{AB} + \beta - 180^\circ$$

$$X_P = X_B + S \cos \alpha$$

$$Y_P = Y_B + S \sin \alpha$$



$$X_P = \frac{X_A \operatorname{ctg} \beta + X_B \operatorname{ctg} \alpha - Y_A + Y_B}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$Y_P = \frac{Y_A \operatorname{ctg} \beta + Y_B \operatorname{ctg} \alpha + X_A - X_B}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

1. 误差的传播

(1) 线性函数误差的传播

设 Y_1 为 n 个观测值 X_i ($i=1,2,\dots,n$) 的一个线性函数 (k_i 为系数, k_0 常数)

$$Y_1 = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_n X_n + k_0$$

X_i 的误差为: $\Delta X_i = \tilde{X}_i - X_i$

同 Δ_{X_i}

Y_1 的误差为:

$$\Delta Y_1 = \tilde{Y}_1 - Y_1$$

线性函数的误差传播公式

$$= k_1 \tilde{X}_1 + k_2 \tilde{X}_2 + \dots + k_n \tilde{X}_n + k_0$$

$$- (k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_n X_n + k_0)$$

$$= k_1 \Delta X_1 + k_2 \Delta X_2 + \dots + k_n \Delta X_n$$

与系数 k_i 和 ΔX_i 有关, 与 k_0 无关

$$Y_1 = (k_1, k_2 \dots k_n) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + k_0$$

$$Y_1 = K X + k_0$$

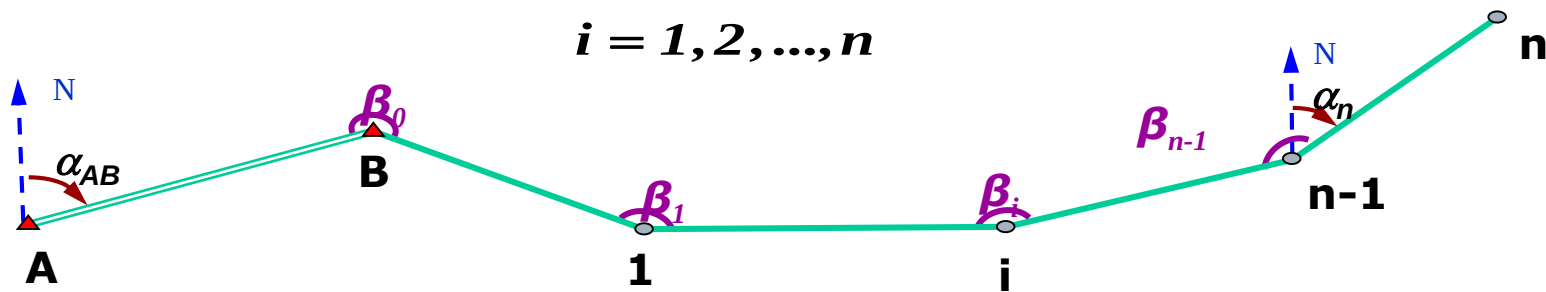
$$\Delta Y_1 = (k_1, k_2 \dots k_n) \begin{pmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \vdots \\ \Delta X_n \end{pmatrix}$$

$$\Delta Y_1 = K \Delta X$$

1. 误差的传播

例：水平角观测值 β_i 的误差为 $\Delta\beta_i$ ，求方位角 α_n 的误差 $\Delta\alpha_n$

$$i = 1, 2, \dots, n$$



$$\alpha_n = \alpha_{AB} + \beta_1 + \beta_2 \cdots + \beta_n \pm n \times 180^\circ$$

$$= (1, 1, \dots, 1) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \alpha_{AB} \pm n \times 180^\circ$$

$$K = (1, 1 \dots 1)$$

$$\Delta\beta = \begin{pmatrix} \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \\ \vdots \\ \Delta\beta_n \end{pmatrix}$$

$$\Delta\alpha_n = K\Delta\beta = \Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 + \dots + \Delta\beta_n = \sum \Delta\beta_i$$

2、泰勒公式及其应用-函数线性化

泰勒公式：若函数 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，则 $f(x)$ 可展开为幂函数+余项

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

近似计算、近似描述

$f(x)$ 可用附近 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 近似计算

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)$$

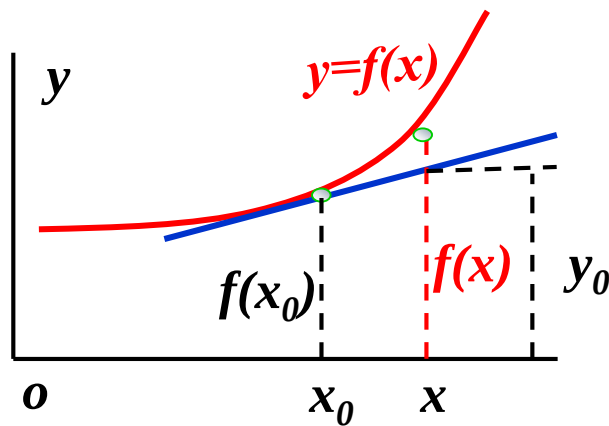
应用条件：1) $x \rightarrow x_0$ ； 2) 多阶可导

$$f(x) = e^x,$$

$$f(0) = 1$$

$$f(0.03) = e^{0.03} \approx f(0) + 1 * (0.03 - 0) = 1.03$$

$$e^{0.03} = 1.0304 \dots$$



3、函数线性化-近似化

(1) 一个一元函数线性化

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &\approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{f'(\mathbf{x}_0)}{1!}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\&= f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 + f(\mathbf{x}_0) \\&= k_1\mathbf{x} + k_0\end{aligned}$$

1个任意函数 → 1个线性函数！

(2) 一个多元函数线性化

$$\begin{aligned}f(\mathbf{X}_{n1}) &\approx f(\mathbf{X}^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_1}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_2}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2^0)L + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_n}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}(\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_n^0) \\&= \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_1}\right)_0 \mathbf{X}_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_2}\right)_0 \mathbf{X}_2 L + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_n}\right)_0 \mathbf{X}_n - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_1}\right)_0 \mathbf{X}_1^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_2}\right)_0 \mathbf{X}_2^0 L - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_n}\right)_0 \mathbf{X}_n^0 + f(\mathbf{X}^0) \\&= \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_1} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_2} L \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_n} \right]_0 \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ L \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} + k_0\end{aligned}$$

$$f(\mathbf{X}) \approx \mathbf{K}_{1n} \mathbf{X} + k_0$$

其中

$$\mathbf{K}_{1n} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}\right)_0 = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_1} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_2} L \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_n} \right]_0 \quad \mathbf{X}_{n1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ M \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix}$$

3、函数线性化-近似化

(3) t个多元函数线性化

$$f_{t1}(\mathbf{X}_{n1}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X}_{n1}) \\ f_2(\mathbf{X}_{n1}) \\ \vdots \\ f_t(\mathbf{X}_{n1}) \end{bmatrix} \approx \mathbf{K}_{tn} \mathbf{X}_{n1} + \mathbf{K}_{t1}^0$$

t个任意函数 → t个线性函数！

$$\mathbf{K}_{tn} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_t}{\partial X_1} & \frac{\partial f_t}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_t}{\partial X_n} \end{bmatrix}_0$$

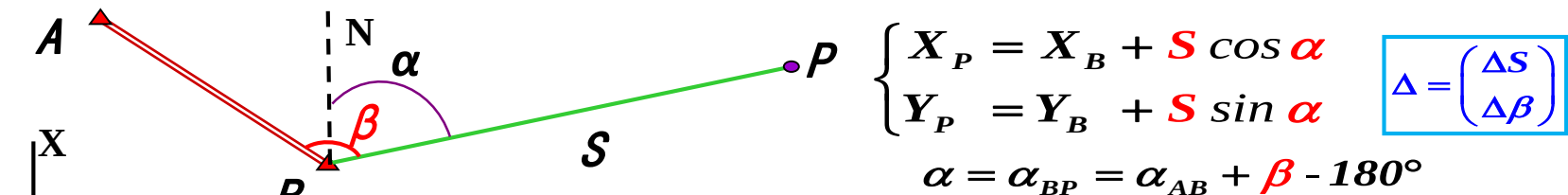
$$\mathbf{K}_{t1}^0 = \begin{bmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \\ \vdots \\ k_t^0 \end{bmatrix}$$

传播规律应用时，只关注K，因此可通过全微分求K：

$$d f_{t1}(\mathbf{X}_{n1}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 d\mathbf{X} = \mathbf{K}_{tn} d\mathbf{X}_{n1}$$

线性化示例

例：水平角 β 和边长 S 观测的误差为 $\Delta\beta$ 、 ΔS ，求点 P (X_p, Y_p) 坐标误差。



$$dX_P = \cos \alpha dS - S \sin \alpha d\beta = (\cos \alpha \quad -S \sin \alpha) \begin{pmatrix} dS \\ d\beta \end{pmatrix}$$

$$Y_I = K X + k_0$$

$$\Delta X_P = \cos \alpha \Delta S - S \sin \alpha \Delta \beta \quad K \Delta$$

$$\Delta Y_I = K \Delta X$$

$$dY_P = \sin \alpha dS + S \cos \alpha d\beta = (\sin \alpha \quad S \cos \alpha) \begin{pmatrix} dS \\ d\beta \end{pmatrix}$$

$$\Delta Y_P = \sin \alpha \Delta S + S \cos \alpha \Delta \beta$$

小结

1、误差的传播 $\Delta X = K \Delta$

2、泰勒公式及其应用

3、函数线性化-近似化

$$\frac{L}{n1} \quad \Delta \quad E(L) = \mu \quad D_{LL}$$

$$X = K \quad L + K_0$$

$$Y = F \quad L + F_0$$

以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！

第二章 误差与协方差传播

§ 2-1 观测误差传播规律

§ 2-2 协方差传播规律

§ 2-3 协方差传播律的应用

§ 2-4 权与定权的常用方法

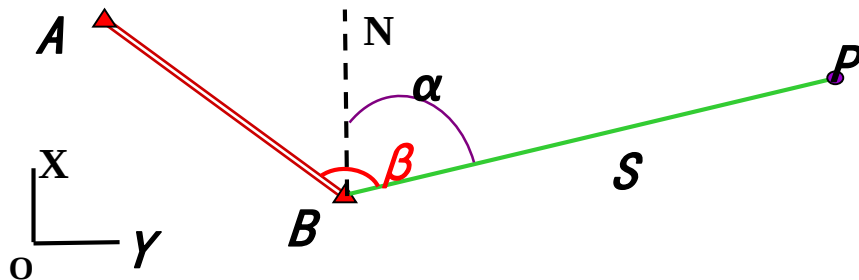
§ 2-5 协因数和协因数传播律

§ 2-6 方差的估算

§ 2-7 系统误差的传播

背景：观测值函数的误差、中误差问题-精度评价问题

例如：通过水平角 β 和边长 S 观测, 可以确定点 $P (X_p, Y_p)$, P点坐标的误差、中误差如何确定？



$$\alpha = \alpha_{BP} = \alpha_{AB} + \beta - 180^\circ$$

$$X_P = X_B + S \cos \alpha$$

$$Y_P = Y_B + S \sin \alpha$$

1. 协方差的传播规律

观测值向量 $\mathbf{X}$ 的数学期望 $\boldsymbol{\mu}_X$ 和方差阵 $\mathbf{D}_{XX}$ 为

$$\mathbf{X}_{n1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu}_{X_{n1}} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{XX_{nn}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{XX_{nn}} = E \left[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)^T \right]$$

1. 协方差的传播规律

(1) Y是X的一组线性函数，求Y的期望和方差为 μ_Y 和方差阵 D_{YY}

$$\mathbf{Y}_{t1} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}X_1 + k_{12}X_2 \cdots + k_{1n}X_n + k_{10} \\ k_{21}X_1 + k_{22}X_2 \cdots + k_{2n}X_n + k_{20} \\ \vdots \\ k_{t1}X_1 + k_{t2}X_2 \cdots + k_{tn}X_n + k_{t0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{t1} & k_{t2} & \cdots & k_{tn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{10} \\ k_{20} \\ \vdots \\ k_{t0} \end{pmatrix}$$

若 $\mathbf{Y}_{t1} = f(\mathbf{X}_{n1})$ 则需 求K

$$d\mathbf{Y}_{t1} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 d\mathbf{X} = \mathbf{K}_{tn} d\mathbf{X}$$

$$\mathbf{Y}_{t1} = \mathbf{K}_{tn} \mathbf{X}_{n1} + \mathbf{K}_{t10}$$

1. 协方差的传播规律

Y是X的t个线性函数

$$Y_{t1} = K_{tn} X_{n1} + K_{t10}$$

Y的数学期望 μ_Y

$$\begin{aligned}\mu_{Y_{t1}} &= E(Y) = E(K_{tn} X_{n1} + K_{t10}) \\ &= K E(X) + K_0 \\ &= K \mu_X + K_0\end{aligned}$$

数学期望传播规律

1. 协方差的传播规律

$$Y_{t1} = K_{tn} X_{n1} + K_{t1} K_0$$

$$D_{YY} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1 Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_1 Y_t} \\ \sigma_{Y_2 Y_1} & \sigma_{Y_2}^2 & \cdots & \sigma_{Y_2 Y_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Y_t Y_1} & \sigma_{Y_t Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_t}^2 \end{bmatrix}$$

$$Y_{t1} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_t \end{pmatrix} = Y_{t1}$$

$$D_{YY} = E \frac{(Y - \mu_Y)}{t1} \frac{(Y - \mu_Y)^T}{1t}$$

$$= E(KX + K_0 - (K\mu_X - K_0))(KX + K_0 - (K\mu_X - K_0))^T$$

$$= KE(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T K^T$$

$$= K D_{XX} K^T$$

$$D_{YY} = K D_{XX} K^T$$

1. 协方差的传播规律

(2) Y、Z均是X的线性函数，求Y、Z的互协方差阵 D_{YZ}

$$\begin{aligned}
 Y_{t1} &= K_{tn} X_{n1} + K_{t1} \\
 Z_{m1} &= F_{mn} X_{n1} + F_{m1}
 \end{aligned}$$

$$D_{YZ} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1 Z_1} & \sigma_{Y_1 Z_2} & \cdots & \sigma_{Y_1 Z_m} \\ \sigma_{Y_2 Z_1} & \sigma_{Y_2 Z_2} & \cdots & \sigma_{Y_2 Z_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{Y_t Z_1} & \sigma_{Y_t Z_2} & \cdots & \sigma_{Y_t Z_m} \end{bmatrix}$$

$$Y_{t1} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_t \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix} = Z_{m1}$$

$$\begin{aligned}
 D_{YZ} &= E(Y - \mu_Y)(Z - \mu_Z)^T \\
 &= E(KX + K_0 - (K\mu_X - K_0))(FX + K_0 - (F\mu_X - K_0))^T \\
 &= KE(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T F^T \\
 &= K_{tn} D_{XX} F_{nm}^T
 \end{aligned}$$

1. 协方差的传播规律

(3) Y、Z均是X的线性函数，求Y、Z合并的方差阵

$$Y = K_{tn} X_{n1} + K_{t1} X_{t1}$$

$$Z = F_{mn} X_{n1} + F_{m1} X_{m1}$$

Y、Z组合成一个列矩阵

$$W_{t+m \ 1} = \begin{pmatrix} Y_{t1} \\ Z_{m1} \end{pmatrix}$$

$$D_{YY} = K_{tn} D_{XX} K_{nt}^T$$

$$D_{ZZ} = F_{mn} D_{XX} F_{nm}^T$$

$$D_{YZ} = K_{tn} D_{XX} F_{nm}^T = D_{ZY}^T$$

$$D_{WW} = \begin{pmatrix} D_{YY} & D_{YZ} \\ D_{ZY} & D_{ZZ} \end{pmatrix}$$

$(t+m)(t+m)$

(4) 方差阵的特点

$$D_{nn}^{XX} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma^2 & & & \\ & \sigma^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

方差阵的特点：

- 1) 对称；
 - 2) 正定；
 - 3) 观测值不相关时， $\sigma_{ij}=0$,为对角矩阵。当对角元相等时， $\sigma_i^2=\sigma^2$ ，为同精度观测。
-

2、协方差传播律示例

例1 设有函数 $Y=4x_1-3x_2-60$, 已知 $X=[x_1 \ x_2]^T$ 的方差阵为:

$$D_{XX} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (cm^2)$$

试求 Y 的方差 σ_Y^2 。

解: $Y_{11} = 4x_1 - 3x_2 - 60 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 60$

系数矩阵为: $K_{12} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}$

Y 的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= D_{YY} = KD_{XX}K^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = 91 (cm^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{t1} &= K_{tn} X_{n1} + K_{t0} \\ D_{YY_{tt}} &= K_{tn} D_{XX_{nn}} K_{nt}^T \end{aligned}$$

2、协方差传播律示例

例2 设有函数 $Y = \frac{1}{2} x_1^2 - x_2 + 20$

$$\mathbf{X}_{21} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}_{XX}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{cm}^2)$$

试求 Y 的标准差 σ_Y 。

解: $dY = x_1 dx_1 - dx_2 = \begin{pmatrix} x_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_{12} d\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \mathbf{D}_{YY}_{11} = \mathbf{K} \mathbf{D}_{XX} \mathbf{K}^T = \begin{pmatrix} x_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - 0.5 & 0.5x_1 - 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ -1 \end{bmatrix} = x_1^2 - x_1 + 2 (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{x_1^2 - x_1 + 2} (\text{cm})$$

$$\begin{aligned} Y_{t1} &= K_{tn} X_{n1} + K_{t1} \\ D_{YY}_{tt} &= K_{tn} D_{XX}_{nn} K_{nt}^T \end{aligned}$$

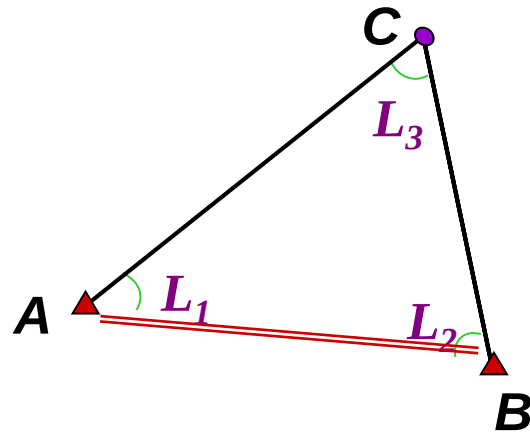
2、协方差传播律示例

例3：三角形内角独立同精度观测，平均分配
闭合差后，求各角的方差、协方差。

$$\mathbf{L}_{31} = (\mathbf{L}_1 \ \mathbf{L}_2 \ \mathbf{L}_3)^T$$

解： $\mathbf{L}$ 为独立同精度观测值， $\sigma_{ij}=0, \sigma_i^2=\sigma^2$ ，

$$D_{LL} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & \\ & \sigma^2 & \\ & & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}_{33}$$

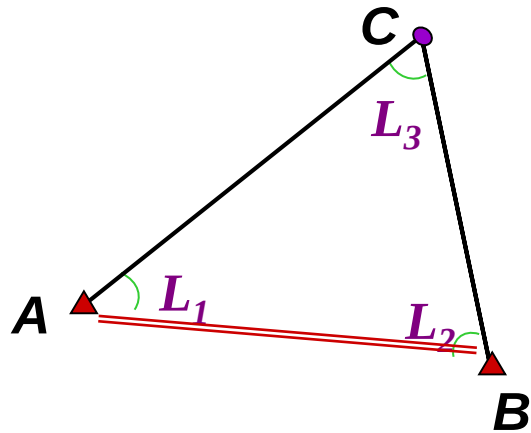


三角形闭合差 w :

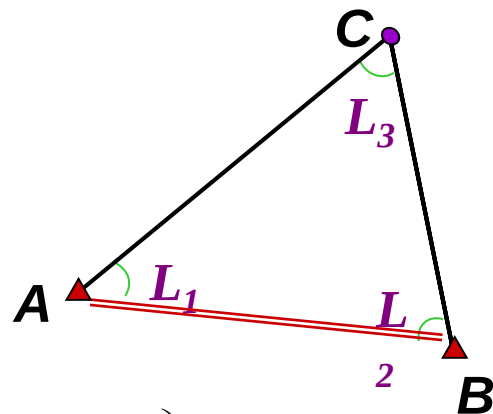
$$w = L_1 + L_2 + L_3 - 180^\circ$$

平均分配闭合差后的估计值为:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{L}_1 \\ \hat{L}_2 \\ \hat{L}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_1 - w/3 \\ L_2 - w/3 \\ L_3 - w/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}L_1 - \frac{1}{3}L_2 - \frac{1}{3}L_3 + 60^\circ \\ -\frac{1}{3}L_1 + \frac{2}{3}L_2 - \frac{1}{3}L_3 + 60^\circ \\ -\frac{1}{3}L_1 - \frac{1}{3}L_2 + \frac{2}{3}L_3 + 60^\circ \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60^\circ \\ 60^\circ \\ 60^\circ \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{L}}_{3 \times 1} &= \mathbf{K}_{3 \times 3} \mathbf{L}_{3 \times 1} + \mathbf{K}_0_{3 \times 1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \underset{3 \times 3}{D_{\hat{L}\hat{L}}} &= \underset{3 \times 3}{K} \underset{3 \times 3}{D_{LL}} \underset{3 \times 3}{K^T} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sigma^2 I \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\sigma^2}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \therefore \quad \sigma_{\hat{L}_1}^2 &= \sigma_{\hat{L}_2}^2 = \sigma_{\hat{L}_3}^2 = \frac{2}{3} \sigma^2 \\
 \sigma_{\hat{L}_i \hat{L}_j} &= -\frac{1}{3} \sigma^2
 \end{aligned}$$

$$D_{LL} = \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{L}_1}^2 & \sigma_{\tilde{L}_1 \tilde{L}_2} & \sigma_{\tilde{L}_1 \tilde{L}_3} \\ \sigma_{\tilde{L}_2 \tilde{L}_1} & \sigma_{\tilde{L}_2}^2 & \sigma_{\tilde{L}_2 \tilde{L}_3} \\ \sigma_{\tilde{L}_3 \tilde{L}_1} & \sigma_{\tilde{L}_3 \tilde{L}_2} & \sigma_{\tilde{L}_3}^2 \end{pmatrix}$$

说明分配闭合差后，估值的方差小于观测值，精度高于观测值

协方差传播律解题步骤

1) 给出观测值向量 X 及其方差阵 D_{XX}

$$X_{n1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad D_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

2) 确定 $Y=KX+K_0$ ，若 $Y=f(X)$ ，则通过 $dY=KdX$ 求 K

$$Y_{t1} = K_{tn} X_{n1} + K_{t1} \quad \text{若} \quad Y_{t1} = f(X_{n1})$$

$$\text{则} \quad dY_{t1} = \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)_0 dX = K_{tn} dX$$

3) 求 $D_{YY} = K_{tn} D_{XX} K_{nt}^T$

注意：1) 根据函数的形式、方差阵的特点，灵活运用传播公式。

2) 非线性化过程注意**单位统一**，特别是**角量**参数弧度角度换算

以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！

第二章 误差与协方差传播

§ 2-1 观测误差传播规律

§ 2-2 协方差传播规律

§ 2-3 协方差传播律的应用 →

§ 2-4 权与定权的常用方法

§ 2-5 协因数和协因数传播律

§ 2-6 方差的估算

§ 2-7 系统误差的传播

1. 独立观测值线性函数的方差
2. 独立同精度观测值平均值的方差
3. 独立同精度分段量距累计距离的方差
4. 水准测量的精度分析
5. 支导线点位的精度
6. 水平角观测精度分析

§ 2-3 协方差传播律的应用

1. 独立观测值的线性函数的方差

现有独立观测向量 $L = (L_1 \ L_2 \ \cdots L_n)^T$ ，其方差阵

$$D_{LL} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

设 X 为 L 的一个线性函数 $X = k_1 L_1 + k_2 L_2 + \cdots + k_n L_n + k_0$
$$= (k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n) (L_1 \ L_2 \ \cdots L_n)^T + k_0 = K_{1n} L_{n1} + k_0$$

由协方差传播律可得：

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= D_{XX} = K_{1n} D_{LL} K_{n1}^T = (k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\ &= (k_1^2 \sigma_1^2 \ k_2^2 \sigma_2^2 \ \cdots \ k_n^2 \sigma_n^2) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = k_1^2 \sigma_1^2 + k_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + k_n^2 \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2 \end{aligned}$$

系数平方与观测
值方差乘积和。

2. 独立同精度观测值的平均值的方差

现有独立同精度观测向量

其方差阵为 D_{LL}

$$L = (L_1 \ L_2 \ \cdots L_n)^T \quad D_{LL} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & \\ & \sigma^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I_{nn}$$

L 的算术平均值

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i = \frac{1}{n} L_1 + \frac{1}{n} L_2 \cdots + \frac{1}{n} L_n \\ &= \left(\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \cdots \frac{1}{n} \right) (L_1 \ L_2 \ \cdots L_n)^T = KL \end{aligned}$$

由协方差传播律可得：

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{L}}^2 &= D_{\bar{L}\bar{L}} = K D_{LL} K^T \\ &= \left(\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n} \right) \sigma^2 I \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2} \sigma^2 + \frac{1}{n^2} \sigma^2 \cdots + \frac{1}{n^2} \sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 < \sigma^2 \\ \sigma_{\bar{L}} &= \sqrt{\frac{1}{n}} \sigma \end{aligned}$$

评论：平均值的
方差为观测值方
差 $1/n$ ，精度明
显高于观测值。

3. 独立同精度分段量距的累计距离的方差

现有独立同精度观测向量 $d_{n1} = (d_1 \ d_2 \ \cdots d_n)^T$



设分段测距中误差为 σ ，则方差阵为 D_{dd}

设 s 为 d_i 的和（一个线性函数）

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$

$$D_{dd} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & & \\ & \sigma^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I_{nn}$$

$$= (1 \ 1 \ \cdots 1) (d_1 \ d_2 \ \cdots d_n)^T = K \ d$$

由协方差传播律可得：

$$\sigma_s^2 = D_{ss} = K_{1n} D_{LL} K_{n1}^T$$

$$= (1 \ 1 \ \cdots 1) \sigma^2 I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (1+1+\cdots+1) \sigma^2 = n \sigma^2 > \sigma^2$$

$$\sigma_s = \sqrt{n} \ \sigma$$

评论：分段数越多，
距离精度越低。

[illegible]

$$\begin{aligned} h_{AB} &= h_1 + h_2 \cdots + h_n \\ &= (1 \ 1 \ \cdots 1)(h_1 \ h_2 \ \cdots h_n)^T = K \ h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{h_{AB}}^2 &= D_{h_{AB}h_{AB}} = K \begin{matrix} D_{hh} \\ 1n \quad nn \quad n1 \end{matrix} K^T \\ &= (1 \ 1 \cdots 1) \sigma_{\text{站}}^2 I (1 \ 1 \cdots 1)^T = n \sigma_{\text{站}}^2 \\ \sigma_{h_{AB}} &= \sqrt{n} \sigma_{\text{站}}\end{aligned}$$

4. 水准测量的精度分析

讨论：A、B间高差 h_{AB} 的方差 $\sigma_{h_{AB}}^2 = n\sigma_{\text{站}}^2$

若A、B间线路长为**大S** (km)，每站线路长均为**小s** (km)，则**站数** $n=S/s$ 。

取 $S=1\text{km}$ ， $n=1/s$ ，则1km线路长高差观测值的方差 σ_{km}^2 为

$$\sigma_{\text{km}}^2 = \frac{1}{S} \sigma_{\text{站}}^2$$

σ_{km}^2 方差 $\sigma_{\text{站}}^2$ 的关系

将 $n=S/s$ ，方差 $\sigma_{\text{站}}^2 = S \sigma_{\text{km}}^2$ 代入 $\sigma_{h_{AB}}^2$

$$\sigma_{h_{AB}}^2 = n\sigma_{\text{站}}^2$$

$$= \frac{S}{s} s \sigma_{\text{km}}^2 = S \sigma_{\text{km}}^2$$

至此得到高差方差的**两种**计算公式

$$\sigma_{h_{AB}}^2 = n\sigma_{\text{站}}^2$$

$$\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{n} \sigma_{\text{站}}$$

$$\sigma_{h_{AB}}^2 = S \sigma_{\text{km}}^2$$

$$\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{S} \sigma_{\text{km}}$$

评论：站数越多、线路越长，高差精度越低。

4. 水准测量的精度分析

例1：水准测量中设 $\sigma_{\text{站}}=3.6\text{mm}$ ，每站线路长按 $s=70\text{m}$ ，每1km线路长的站数 $n=15$ 站。则1km 线路长的高差中误差 σ_{km} 为：

$$\sigma_{\text{km}} = \sqrt{n} \sigma_{\text{站}} = \sqrt{15} \times 3.6 = 13.9 \text{ (mm)}$$

取**3倍中误差**作为极限误差，由此得出，规范规定**等外水准闭合差的允许值**为：

$$\begin{aligned} \sigma_{h\text{允}} &= \sqrt{S} \sigma_{\text{km允}} = \sqrt{S} 3 \sigma_{\text{km}} \\ &= 40 \sqrt{S} \text{ (mm)} \end{aligned}$$

例2：水准测量中若要求 σ_{km} 不超过10mm，高差中误差 σ_h 不超过60mm，则该水准路线长度不应超过多少公里？（36km）

$$\sigma_h^2 = S \sigma_{\text{km}}^2 \quad S = \frac{\sigma_h^2}{\sigma_{\text{km}}^2} = \frac{60^2}{10^2} = 36 \text{ (km)}$$

5. 支导线点位的精度

独立观测值边长 S 和水平角 β ，中误差 σ_β'' , σ_S ，求 P 点的点位方差。

解 设 $\underset{2 \times 1}{L} = \begin{pmatrix} S \\ \beta \end{pmatrix}$ 则 $\underset{2 \times 1}{D_{LL}} = \begin{pmatrix} \sigma_S^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta''^2 \end{pmatrix}$

P 点坐标组成 Z 矩阵， Z 是 L 的非线性函数

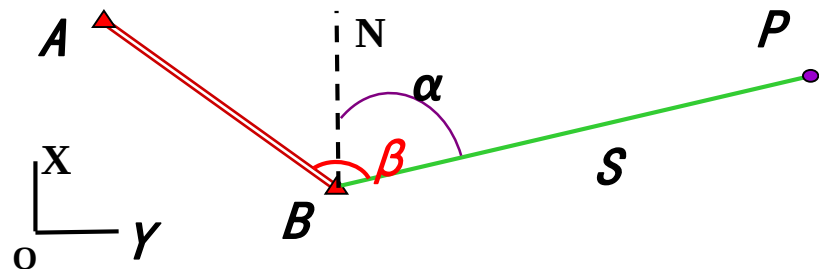
$$\underset{2 \times 1}{Z} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_B + S \cos \alpha \\ Y_B + S \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \alpha_{BP} = \alpha_{AB} + \beta - 180^\circ$$

$$dX_P = \cos \alpha dS - S \sin \alpha \frac{d\beta''}{\rho''}$$

$$dY_P = \sin \alpha dS + S \cos \alpha \frac{d\beta''}{\rho''}$$

通常 $d\beta$ 、 σ_β 单位取"
，用 ρ'' 统一单位



$$\underset{2 \times 1}{dZ} = \begin{pmatrix} dX_P \\ dY_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\frac{S}{\rho''} \sin \alpha \\ \sin \alpha & \frac{S}{\rho''} \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS \\ d\beta \end{pmatrix} = K \underset{2 \times 1}{dL}$$

$$\underset{2 \times 1}{d\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} d\mathbf{X}_P \\ d\mathbf{Y}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\frac{S}{\rho''} \sin \alpha \\ \sin \alpha & \frac{S}{\rho''} \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS \\ d\beta \end{pmatrix} = \mathbf{K} \, d\mathbf{L}$$

$$\underset{22}{D_{ZZ}} = \underset{22}{\mathbf{K}} \underset{2 \times 2}{D_{LL}} \underset{2 \times 2}{\mathbf{K}^T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\frac{S}{\rho''} \sin \alpha \\ \sin \alpha & \frac{S}{\rho''} \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_S^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^{\prime\prime 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\frac{S}{\rho''} \sin \alpha \\ \sin \alpha & \frac{S}{\rho''} \cos \alpha \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_S^2 \cos \alpha & -\frac{\sigma_\beta^{\prime\prime 2} S}{\rho''} \sin \alpha \\ \sigma_S^2 \sin \alpha & \frac{\sigma_\beta^{\prime\prime 2} S}{\rho''} \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\frac{S}{\rho''} \sin \alpha & \frac{S}{\rho''} \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_S^2 \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_\beta^{\prime\prime 2} S^2}{\rho^{\prime\prime 2}} \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \left(\sigma_S^2 - \frac{\sigma_\beta^{\prime\prime 2} S^2}{\rho^{\prime\prime 2}} \right) \\ \sin \alpha \cos \alpha \left(\sigma_S^2 - \frac{\sigma_\beta^{\prime\prime 2} S^2}{\rho^{\prime\prime 2}} \right) & \sigma_S^2 \sin^2 \alpha + \frac{\sigma_\beta^{\prime\prime 2} S^2}{\rho^{\prime\prime 2}} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

点位中误差及几何意义

$$D_{ZZ} = \begin{pmatrix} \sigma_S^2 \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_\beta''^2 S^2}{\rho''^2} \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \left(\sigma_S^2 - \frac{\sigma_\beta''^2 S^2}{\rho''^2} \right) \\ \sin \alpha \cos \alpha \left(\sigma_S^2 - \frac{\sigma_\beta''^2 S^2}{\rho''^2} \right) & \sigma_S^2 \sin^2 \alpha + \frac{\sigma_\beta''^2 S^2}{\rho''^2} \cos^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_P}^2 & \sigma_{X_P Y_P} \\ \sigma_{Y_P X_P} & \sigma_{Y_P}^2 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \end{pmatrix}$$

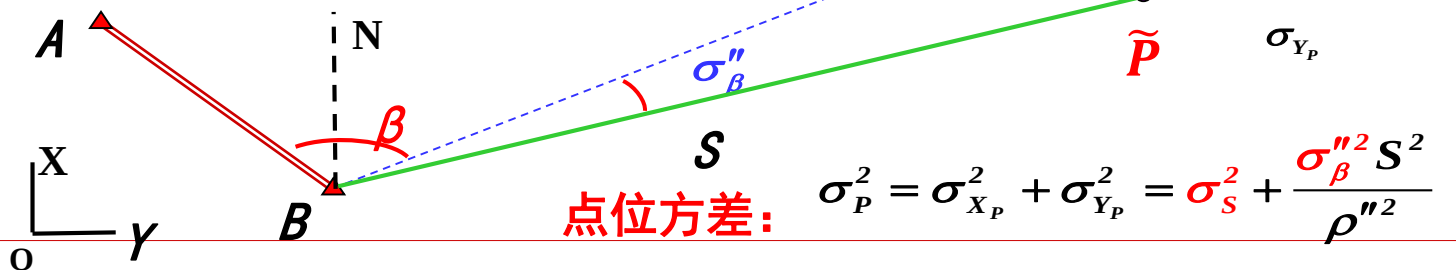
$$\sigma_{X_P}^2 = \sigma_S^2 \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_\beta''^2 S^2}{\rho''^2} \sin^2 \alpha$$

$$\sigma_{Y_P}^2 = \sigma_S^2 \sin^2 \alpha + \frac{\sigma_\beta''^2 S^2}{\rho''^2} \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_\beta''}{\rho''} S$$

P点沿BP**纵向中误差** σ_S : 由测边误差引起

横向中误差 σ_t : 由测角误差引起



6. 水平角观测精度分析--6" 经纬仪的限差的制定

使用 *DJ6* 型经纬仪观测水平角，一测回方向观测值 *l* 的中误差： $\sigma_{l_{\text{回}}} = 6''$

一测回由2个半测回取平均值得出： $l = (l_{\text{左半}} + l_{\text{右半}}) / 2$ 。

方向观测值一测回与半测回的中误差关系 $\sigma_{l_{\text{回}}} = \sqrt{1/2} \sigma_{l_{\text{半}}}$

半测回方向观测值 $l_{\text{半}}$ 的中误差为

$$\sigma_{l_{\text{半}}} = \sqrt{2} \sigma_{l_{\text{回}}} = 1.41 \times 6'' = 8.5''$$

一测回角度观测值 $\beta = l_2 - l_1$, β 的中误差

$$\sigma_{\beta} = \sqrt{2} \sigma_{l_{\text{回}}} = 1.41 \times 6'' = 8.5''$$

6. 水平角观测精度分析--6" 经纬仪的限差的制定

(1) 半测回测角精度

$$\sigma_{\beta\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sigma_{1\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \times 8.5'' = 12''$$

(2) 盘左、盘右半测回观测角值的限差

半测回互差 $\Delta = \beta_L - \beta_R$

互差的中误差 $\sigma_{\Delta} = \sqrt{2}\sigma_{\beta\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \times 12'' = 17''$

取两倍中误差作为限差，

则盘左、盘右半测回互差的限差为

$$f_{\Delta} = 2\sigma_{\Delta} = 34''$$

6. 水平角观测精度分析——一台6" 仪器的限差的制定

(3) 测回间角度观测值的限差

两测回角度观测值互差： $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$

互差的中误差： $\sigma_{\Delta\beta} = \sqrt{2}\sigma_{\beta} = 8.5''\sqrt{2} = 12''$

取两倍中误差作为限差，因此规范规定：两测回角度观测值互差限差为24''

$$f_{\Delta\beta} = 2\sigma_{\Delta\beta} = 24''$$

以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！

第二章 误差与协方差传播

§ 2-1 观测误差传播规律

§ 2-2 协方差传播规律

§ 2-3 协方差传播律的应用

§ 2-4 权与定权的常用方法

§ 2-5 协因数和协因数传播律

§ 2-6 方差的估算

§ 2-7 系统误差的传播

1、观测值的权

2、定权的方法

§ 2-4 权与定权的常用方法

1、观测值的权-处理误差分配问题的相对论

方差是衡量观测值绝对精度的指标。但方差值通常不易确定，方差的比例关系则相对容易确定。描述观测值精度比例的指标—权。

一组观测值 L_i ，方差为 σ_i^2 ($i=1,2,\dots,n$)，取一个观测值

权的定义： L_0 的方差为 σ_0^2 ，则 L_i 的权 p_i 为

weight

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

单位权

L_0 的权 $p_0 = \sigma_0^2 / \sigma_0^2 = 1$ ，为单位权；

L_0 称为单位权观测值；

σ_0^2 称为单位权方差。

1、观测值的权

权的性质：

$$L_i \text{的权} : p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

- 1) 权与方差成反比。方差越大，权越小，精度越低。
- 2) 一个观测问题中只能用同一个 σ_0^2 ，否则失去可比性。
- 3) 权值与 σ_0^2 取值有关，但权之间的比例关系不变。

$$\begin{aligned} p_1 : p_2 : \dots : p_n &= \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} : \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} : \dots : \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2} \\ &= \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \dots : \frac{1}{\sigma_n^2} \end{aligned}$$

权、方差的关系

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$$

$$\sigma_0^2 = p_i \sigma_i^2$$

例1：已知A角的中误差 $\sigma_A=2''$ ，权 $P_A=4$ ，B角的权 $P_B=16$ 。求单位权中误差 σ_0 及B角的中误差 σ_B 。

解： 由权的定义式可得

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

$$\sigma_0^2 = p_A \sigma_A^2 = 4 \times 2^2 = 16 (")^2$$

$$\sigma_0 = 4 "$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_B} = \frac{16}{16} = 1 (")^2$$

$$\sigma_B = 1 "$$

2、定权的方法

(一) 水准测量定权

(1) 用测站数定权（用于山地）

取 C 个测站的观测高差的方差为 **单位权方差**，即 $\sigma_0^2 = C \sigma_{\text{站}}^2$

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{h_i}^2} = \frac{C \cdot \sigma_{\text{站}}^2}{N_i \cdot \sigma_{\text{站}}^2} = \frac{C}{N_i}$$

$$\sigma_{h_i}^2 = N_i \sigma_{\text{站}}^2$$

$$\sigma_{h_i}^2 = S_i \sigma_{km}^2$$

(2) 用线路长度定权（用于平地）

取 C km线路长度的观测高差的方差为 **单位权方差**，即

$$\sigma_0^2 = C \sigma_{km}^2$$

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{h_i}^2} = \frac{C \cdot \sigma_{km}^2}{S_i \cdot \sigma_{km}^2} = \frac{C}{S_i}$$

例2 确定下列水准路线中各观测高差的权。

解：由协方差传播律知

$$\sigma_{h_i}^2 = S_i \sigma_{km}^2$$

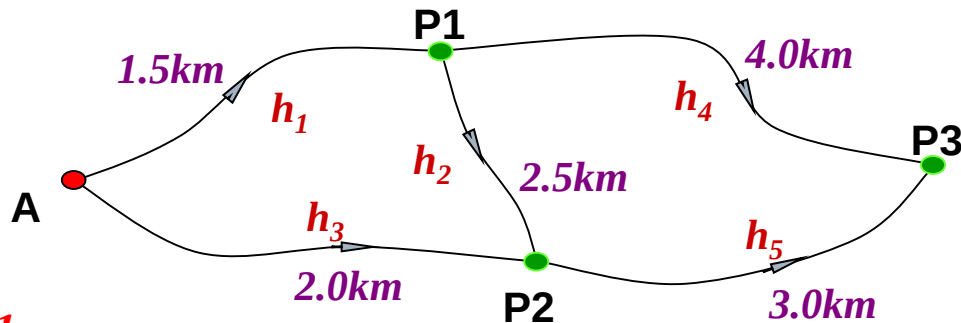
(1) 取 $\sigma_0^2 = \sigma_{km}^2$

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{h_i}^2} = \frac{\sigma_{km}^2}{S_i \sigma_{km}^2} = \frac{1}{S_i}$$

$$p_1 = \frac{1}{1.5} \quad p_2 = \frac{1}{2.5} \quad p_3 = \frac{1}{2.0} \quad p_4 = \frac{1}{4.0} \quad p_5 = \frac{1}{3.0}$$

(2) 取 $\sigma_0^2 = 6\sigma_{km}^2$ $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{h_i}^2} = \frac{\sigma_{km}^2}{S_i \sigma_{km}^2} = \frac{6}{S_i}$

$$p_1 = 4.0 \quad p_2 = 2.4 \quad p_3 = 3 \quad p_4 = 1.5 \quad p_5 = 2.0$$



例3 在相同条件下进行四等水准测量，线路长4km的观测高差 h_1 的中误差 $\sigma_1=1\text{mm}$ 。求64km观测高差 h_2 的中误差 σ_2 。

解：取 $C=4\text{km}$ ， $\sigma_0 = \sigma_1=1\text{mm}$

则 $S=64\text{km}$ 观测高差的权 p_2 ，中误差 σ_2 为

$$p_2 = \frac{C}{S_2} = \frac{4\text{km}}{64\text{km}} = \frac{1}{16}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_2} = \frac{(1\text{mm})^2}{1/16} = 16 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_2 = 4\text{mm}$$

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

答：64公里观测高差的中误差为4mm。

(二) 距离量测定权

1) 钢尺量距的权

设单位长度距离丈量的方差为 σ^2 ，则丈量距离 S_i 的方差为 $\sigma_{S_i}^2 = S_i \sigma^2$

取丈量长度 C 的方差为单位权方差，即 $\sigma_0^2 = C \sigma^2$

则 S_i 的权为

$$p_{S_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{S_i}^2} = \frac{C \sigma^2}{S_i \sigma^2} = \frac{C}{S_i}$$

评价：距离丈量的权
与长度成反比

2) 光电测距的权

$$p_{S_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{S_i}^2}$$

$$\sigma_{S_i} = a + b S_i \times 10^{-6}$$
$$3mm + 2 \times 10^{-6} S_i (km)$$

σ_0^2 为选取的单位权方差， $\sigma_{S_i}^2$ 为测距 S_i 的方差，它包含固定误差 a 和比例误差 b 两部分。

(三) 独立同精度观测算术平均值的权

一组的独立同精度 (方差 σ^2) 观测值, 其 n_i 个观测值的算术平均值 x_{ni} 的方差为:

$$\sigma_{x_{n_i}}^2 = \frac{1}{n_i} \sigma^2$$

取C次观测值的算术平均值为单位权观测值, 即

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{C} \sigma^2$$

则算术平均值的权为

$$p_{x_{ni}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{x_{n_i}}^2} = \frac{n_i}{C}$$

评论: 算术平均值的权与观测次数成正比。

以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！

第二章 误差与协方差传播

§ 2-1 观测误差传播规律

§ 2-2 协方差传播规律

§ 2-3 协方差传播律的应用

§ 2-4 权与定权的常用方法

§ 2-5 协因数和协因数传播律

§ 2-6 方差的估算

§ 2-7 系统误差的传播

1、协因数与协因数阵

2、协因数传播规律

§ 2-5 协因数和协因数传播律

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

1、协因数与协因数阵

观测值的可描述观测值间的相对精度，**权可定**，但**权不能描述相关性**，传播运算不方便。为此引入协因数。

(1) 协因数定义

L_i 与 L_i 的协因数 $Q_{ii} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_n^2} (= \frac{1}{p_i})$

L_i 与 L_j 的协因数 $Q_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_0^2}$

取 σ_0^2 后， $\sigma_i^2 \rightarrow Q_{ii}$ ， $\sigma_{ij}^2 \rightarrow Q_{ij}$ ，因此 L 的方差 D_{LL} 阵可变为 Q_{LL}

(2) 协因数阵

L 的协因数阵

$$Q_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} D_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

取 σ_0^2 后

X、Y的协因数阵

$$Q_{XX} = \frac{1}{\sigma_0^2} D_{XX} \quad Q_{YY} = \frac{1}{\sigma_0^2} D_{YY}$$

X与Y的互协因数阵

$$Q_{XY} = \frac{1}{\sigma_0^2} D_{XY} = Q_{YX}^T$$

(3) 权阵的定义

$$Q_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} D_{LL} \quad Q_{LL} \text{ 对阵可逆}$$

$$P_{LL} = Q_{LL}^{-1} \quad P_{LL} \text{ 称为 } L \text{ 的权阵}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_0^2} D_{LL} \right)^{-1} = \sigma_0^2 D_{LL}^{-1}$$

(4) D、Q、P三矩阵权阵关系

D、Q互为系数乘积关系；Q、P互逆
D、Q、P对称

相关观测 L_{n1}

$$D_{nn} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Q_{nn} = \frac{1}{\sigma_0^2} D_{nn} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_{nn} = Q_{nn}^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Q_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} D_{LL} \quad P_{LL} = Q_{LL}^{-1} = \sigma_0^2 D_{LL}^{-1}$$

独立观测 L_{n1}

$$D_{nn} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Q_{nn} = \frac{1}{\sigma_0^2} D_{nn} = \begin{pmatrix} Q_{11} & & & \\ & Q_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_{nn} \end{pmatrix} \quad P_{ii} = p_i = \frac{1}{Q_{ii}}$$

$$P_{nn} = \begin{pmatrix} 1/Q_{11} & & & \\ & 1/Q_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/Q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & & & \\ & P_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_{nn} \end{pmatrix}$$

例1 已知观测值向量 L 的协因数阵为 Q_{LL} 。

试求：1) 观测值 L_1 、 L_2 的权 p_1 和 p_2 ；

2) 观测值向量 L 的权阵 P_{LL} 。

$$Q_{LL} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

解：1) 由权与协因数的倒数关系得

$$p_1 = 1/Q_{11} = 1/2 \quad p_2 = 1/Q_{22} = 1/3$$

2) 由权阵与协因数阵的互逆关系得

$$P_{LL} = Q_{LL}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = \frac{3}{5} \neq p_1, \quad P_{22} = \frac{2}{5} \neq p_2$$

例2 已知观测向量 L 的权阵为 P_{LL} ，试求观测值 L_1 ， L_2 的权。

$$P_{LL} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

解：由权阵与协因数阵的互逆关系得：

$$Q_{LL} = P_{LL}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

由权与协因数的倒数关系得：

$$p_1 = p_2 = 1/Q_{ii} = 8/3$$

2、协因数传播规律

背景：协方差传播规律，用以评价观测值函数的方差（绝对精度）。

$$\begin{array}{l} X \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} Y = K X + K_0 \\ Z = F X + F_0 \end{array}$$

D_{XX}

协方差传播

$$D_{YY} = K D_{XX} K^T$$

$$D_{ZZ} = F D_{XX} F^T$$

$$D_{YZ} = K D_{XX} F^T = D_{ZY}^T$$

当引入观测值的权，能否确定观测值函数的权（相对精度）？

这就需要介绍协因数传播问题

2、协因数传播规律

观测值向量 $\mathbf{X}$ 的方差阵 $\mathbf{D}_{xx}$ ， $\mathbf{Y}$ 、 $\mathbf{Z}$ 均是 $\mathbf{X}$ 的线性函数

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\longrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{K} \mathbf{X} + \mathbf{K}_0 \\ &\quad \mathbf{Z} = \mathbf{F} \mathbf{X} + \mathbf{F}_0 \end{aligned}$$

$\mathbf{D}_{xx}$ 协方差传播

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{yy} &= \mathbf{K} \mathbf{D}_{xx} \mathbf{K}^T \\ \mathbf{D}_{zz} &= \mathbf{F} \mathbf{D}_{xx} \mathbf{F}^T \\ \mathbf{D}_{yz} &= \mathbf{K} \mathbf{D}_{xx} \mathbf{F}^T = \mathbf{D}_{zy}^T \end{aligned}$$

评论：协因数与协方差属同理传播

取 σ_0

$$\mathbf{Q}_{xx} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{D}_{xx}$$

协因数传播

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{yy} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{D}_{yy} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{K} \mathbf{D}_{xx} \mathbf{K}^T = \mathbf{K} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{K}^T \\ \mathbf{D}_{zz} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{D}_{zz} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{F} \mathbf{D}_{xx} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}^T \\ \mathbf{D}_{yz} &= \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{D}_{yz} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{K} \mathbf{D}_{xx} \mathbf{F}^T = \mathbf{K} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}^T = \mathbf{Q}_{zy}^T \end{aligned}$$

例3 独立观测值 L_i 的权为 p_i ($i=1, 2, \dots, n$), 求其加权平均值的权。

解：依题意

$$Q_{LL} = \begin{pmatrix} Q_{11} & & \\ & Q_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & Q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/p_1 & & \\ & 1/p_2 & \\ & & \ddots \\ & & & 1/p_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_{11} &= \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{[p]} L_i = \frac{1}{[p]} (p_1 L_1 + p_2 L_2 + \dots + p_n L_n) \\ &= \frac{1}{[p]} (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n) (L_1 \ L_2 \ \dots \ L_n)^T \\ [p] &= p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= K Q_{LL} K^T \\ Q_{11} &= \frac{1}{[p]} (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n) \begin{pmatrix} 1/p_1 & & \\ & 1/p_2 & \\ & & \ddots \\ & & & 1/p_n \end{pmatrix} \frac{1}{[p]} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \frac{1}{[p]^2} (1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \frac{1}{[p]} \\ p_x &= \frac{1}{Q_{11}} = [p] \end{aligned}$$

评论：加权平均值的精度高于观测值

例4 观测向量 X 、 Y 的协因数阵为 Q_{XX} 、 Q_{YY} 、 $Q_{XY}=Q_{YX}^T$ ， $W=KX+FY$ 。

求 Q_{WW} 、 Q_{WX} 。

解：依题意，组建观测向量 $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $Q_{ZZ} = \begin{pmatrix} Q_{XX} & Q_{XY} \\ Q_{YX} & Q_{YY} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} Y &= KX + K_0 \\ Z &= F X + F_0 \\ D_{YY} &= K D_{XX} K^T \\ D_{ZZ} &= F D_{XX} F^T \\ D_{YZ} &= K D_{XX} F^T = D_{ZY}^T \end{aligned}$$

$$W = KX + FY = (K \ F) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_{WW} &= (K \ F) \begin{pmatrix} Q_{XX} & Q_{XY} \\ Q_{YX} & Q_{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^T \\ F^T \end{pmatrix} \\ &= (KQ_{XX} + FQ_{YX} \quad KQ_{XY} + FQ_{YY}) \begin{pmatrix} K^T \\ F^T \end{pmatrix} \\ &= KQ_{XX}K^T + FQ_{YX}K^T + KQ_{XY}F^T + FQ_{YY}F^T \end{aligned}$$

$$W = KX + FY = (K \ F) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$X = IX + OY = (I \ O) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_{WX} &= (K \ F) \begin{pmatrix} Q_{XX} & Q_{XY} \\ Q_{YX} & Q_{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^T \\ O^T \end{pmatrix} \\ &= (K \ F) \begin{pmatrix} Q_{XX} \\ Q_{YX} \end{pmatrix} \\ &= KQ_{XX} + FQ_{YX} \end{aligned}$$

例5 三角高程测量中，高差计算公式 $h=S \tan \alpha +i-l$ 。 S 、 α 的权为 p_S 、 p_α ，忽略 i 、 l 的误差。求 h 的权 p_h 。

解：依题意，组建观测向量 $Z = \begin{pmatrix} S \\ \alpha \end{pmatrix}$

$$Q_{ZZ} = \begin{pmatrix} Q_{SS} & Q_{S\alpha} \\ Q_{\alpha S} & Q_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/p_S & 0 \\ 0 & 1/p_\alpha \end{pmatrix}$$

$$h = S \tan \alpha + i - l$$

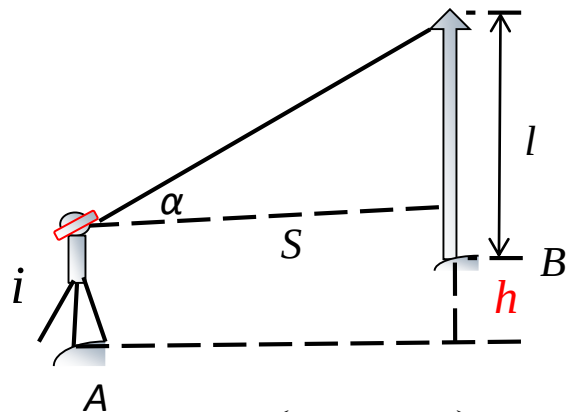
$$dh = \tan \alpha dS + \frac{S}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{\rho''} = \begin{pmatrix} \tan \alpha & \frac{S}{\rho'' \cos^2 \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS \\ d\alpha \end{pmatrix}$$

$$Q_{hh} = \begin{pmatrix} \tan \alpha & \frac{S}{\rho'' \cos^2 \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/p_S & 0 \\ 0 & 1/p_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tan \alpha \\ \frac{S}{\rho'' \cos^2 \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan \alpha / p_S & \frac{S}{\rho'' p_\alpha \cos^2 \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tan \alpha \\ \frac{S}{\rho'' \cos^2 \alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \tan^2 \alpha \frac{1}{p_S} + \left(\frac{S}{\rho'' \cos^2 \alpha} \right)^2 \frac{1}{p_\alpha}$$

$$\approx \frac{S^2}{\rho''^2} \frac{1}{p_\alpha} \quad (\alpha \text{ 很小, } \tan \alpha \approx 0, \cos \alpha \approx 1)$$

$$p_h = \frac{1}{Q_{hh}} \approx \frac{\rho''^2}{S^2} p_\alpha$$



评论：三角高差的权与水平距离平方成反比

以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！

第二章 误差与协方差传播

§ 2-1 观测误差传播规律

§ 2-2 协方差传播规律

§ 2-3 协方差传播律的应用

§ 2-4 权与定权的常用方法

§ 2-5 协因数和协因数传播律

§ 2-6 方差的估算

§ 2-7 系统误差的传播

- 1、独立同精度真误差估算方差
- 2、独立不同精度真误差估算方差
- 3、三角形闭合差估算测角中误差
- 4、由一组双观测值互差估算中误差

§ 2-6 方差的估算

方差是观测值变量的数字特征，为理论值，不易确定，只能估算。

1、独立同精度真误差估算方差

设有一组独立同精度（方差相同 σ^2 ）观测值（只含偶然误差）

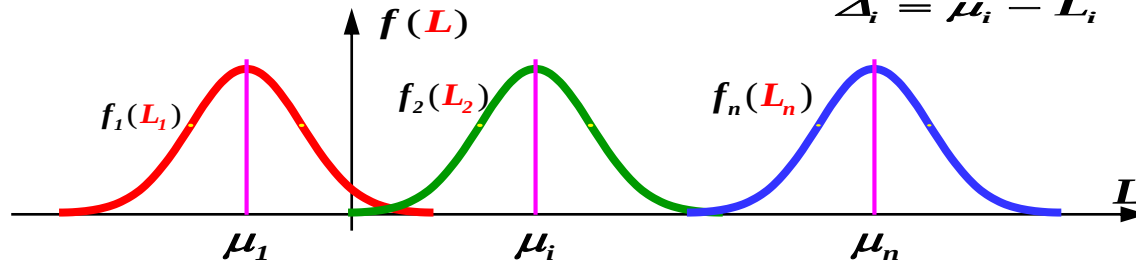
观测值 $L_1, L_2, \dots, L_n$ $L_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$

数学期望 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$

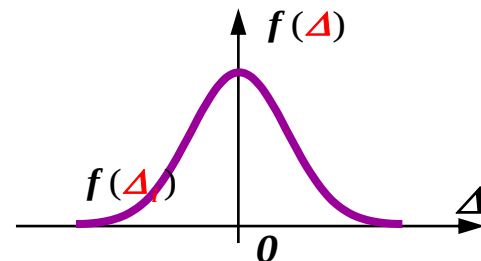
真误差 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ $\Delta_i \sim N(0, \sigma^2)$

$$\Delta_i = \mu_i - L_i$$

Δ_i 同分布



观测值概率密度分布曲线



误差概率密度分布曲线

1、独立同精度真误差估算方差

观测值变量 L_i 和误差变量 Δ_i 服从正态分布，分布参数 σ^2 可由离散的真误差 Δ_i 计算：

$$L_i \sim N(\mu_i, \sigma^2) \quad \Delta_i \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 f(\Delta_i) d\Delta_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2\end{aligned}$$

σ^2 可由独立同精度的一组 Δ_i 估算

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2$$

2、独立不同精度真误差估算方差

设有一组独立不同精度（方差 σ_i^2 ）观测值（只含偶然误差）

观测值 $L_1, L_2, \dots, L_n$

数学期望 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$

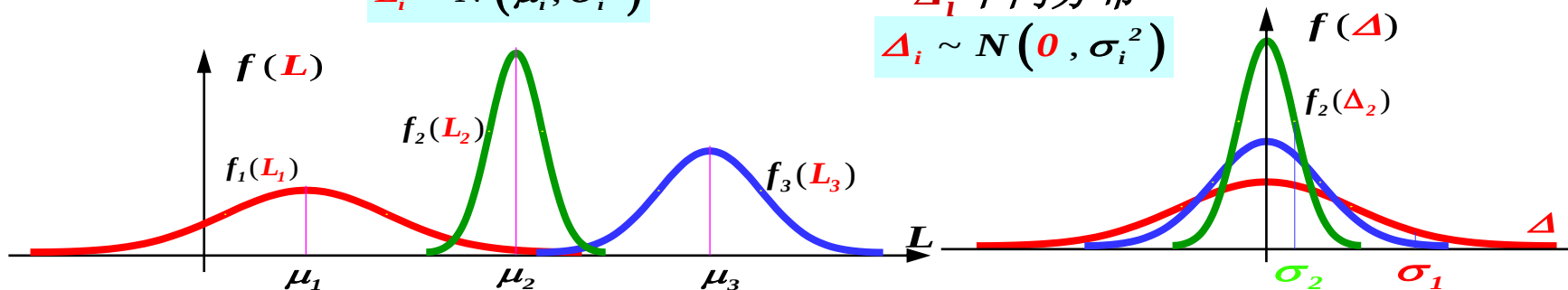
真误差 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ $\Delta_i = \mu_i - L_i$

观测值的权 $P_1, P_2, \dots, P_n$

$$L_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

Δ_i 不同分布

$$\Delta_i \sim N(0, \sigma_i^2)$$



观测值概率密度分布曲线

误差概率密度分布曲线

2、独立不同精度真误差估算方差

思路：由不同精度 p_i 的一组 $L_i (\Delta_i)$ ，构建一组同精度观测量 $L_i' (\Delta_i')$

观测值 L_i' : $L_1', L_2', \dots, L_n'$

真误差 Δ_i' : $\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_n'$

$$\text{令 } L_i' = \sqrt{p_i} L_i \quad \Delta_i' = \mu_i' - L_i' = \sqrt{p_i} (\mu_i - L_i) = \sqrt{p_i} \Delta_i$$

$$\frac{1}{p_i'} = Q_{L_i' L_i'} = \sqrt{p_i} Q_{L_i L_i} \sqrt{p_i} = \sqrt{p_i} \frac{1}{p_i} \sqrt{p_i} = 1$$

$p_i' = 1$ 因此，观测值 L_i' 为独立同精度（方差 σ_0^2 ）观测值

则方差 σ_0^2 的估值为
$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \Delta_i^2$$

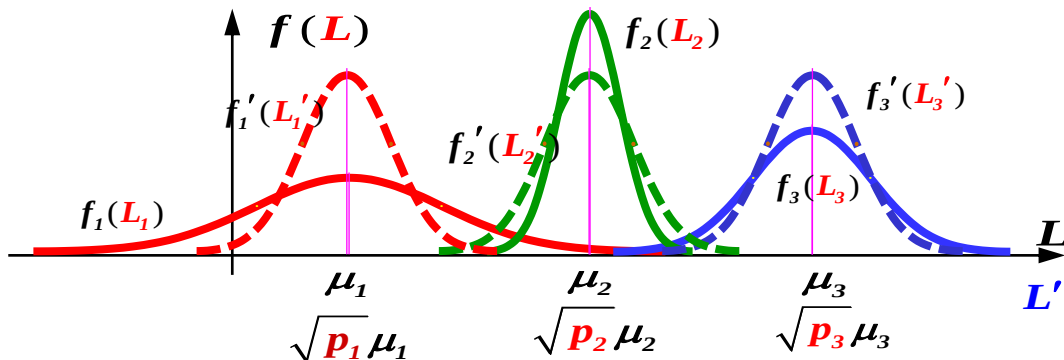
方差 σ_i^2 的估值为
$$\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}_0^2 / p_i$$

从不同精度 $L_i(\Delta_i)$ ，到同精度 $L'_i(\Delta'_i)$ 分布改变

$$L_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

$$L'_i = \sqrt{p_i} L_i$$

$$L'_i \sim N(\sqrt{p_i} \mu_i, \sigma_0^2)$$



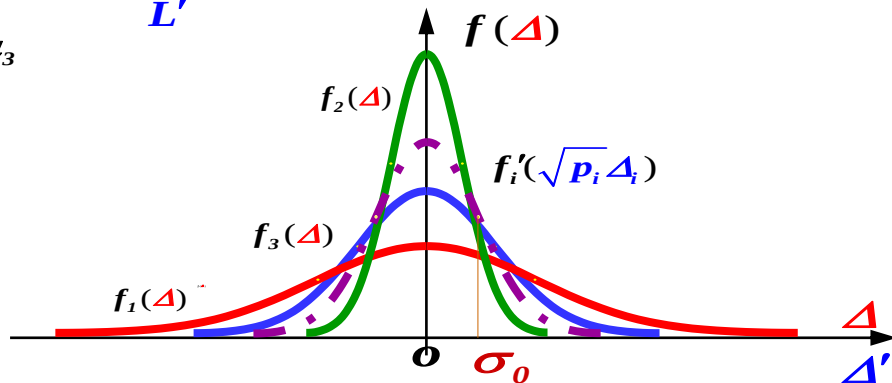
观测值概率密度分布曲线

$$\Delta_i \sim N(0, \sigma_i^2)$$

$$\Delta'_i \sim N(0, \sigma_0^2)$$

不同分布

同分布



误差概率密度分布曲线

3、由一组三角形闭合差估算测角中误差

由独立同精度 (σ_β) 的内角观测值,
得到一组三角形内角和观测值

$$S_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

由协方差传播律

$$\sigma_{S_i}^2 = \sigma_{\alpha_i}^2 + \sigma_{\beta_i}^2 + \sigma_{\gamma_i}^2 = \underline{3\sigma_\beta^2 = \sigma_S^2}$$

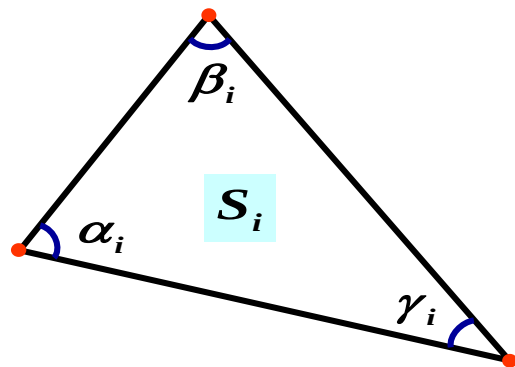
故 S_i 为独立同精度 (σ_S) 观测

S_i 的闭合差 $w_i = S_i - 180^\circ$

S_i 的误差 $\Delta_i = \tilde{S}_i - S_i = 180^\circ - S_i = -w_i$

由同精度真误差估算方差的公式得

$$\hat{\sigma}_S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^2$$



测角方差的估值为

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{1}{3} \hat{\sigma}_S^2 = \frac{1}{\underline{3n}} \sum_{i=1}^n w_i^2$$

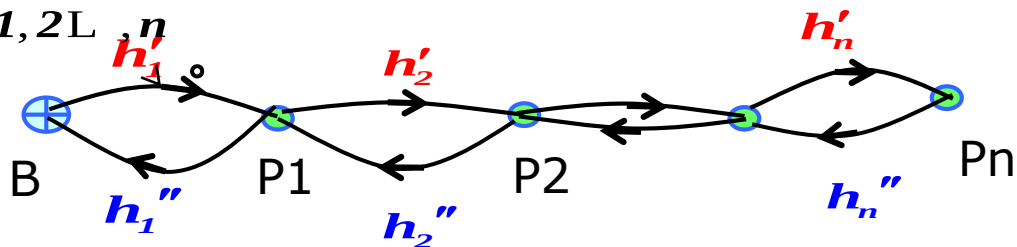
测角中误差的估值为

$$\hat{\sigma}_\beta = \sqrt{\frac{1}{\underline{3n}} \sum_{i=1}^n w_i^2}$$

菲列罗公式, 为测角精度的
测定提供了手段

4、由一组双观测值互差估算中误差

双观测值 L_i' 、 L_i'' 分别为独立不同精度观测， L_i' 与 L_i'' 为独立同精度 (σ_i 、 p_i) 观测， $i = 1, 2, \dots, n$



双观测值的互差 d_i $d_i = L_i' - L_i''$

d_i 的误差 Δd_i $\Delta d_i = \tilde{d}_i - d_i = \tilde{L}_i' - \tilde{L}_i'' - d_i = -d_i$

d_i 的方差 $\sigma_{d_i}^2 = 2\sigma_i^2$

d_i 的权 $p_{d_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{d_i}^2} = \frac{\sigma_0^2}{2\sigma_i^2} = \frac{p_i}{2}$

4、由一组双观测值互差估算方差

(1) 单位权方差的估值

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{d_i} \Delta_{d_i}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n p_i d_i^2$$

(2) 双观测值方差的估值

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{p_i}$$

(3) 双观测列平均值的方差估值

双观测值的平均值 $\bar{L}_i = \frac{1}{2} (L'_i + L''_i)$

平均值的方差 $\sigma_{\bar{L}_i}^2 = \frac{1}{4} \sigma_i^2 + \frac{1}{4} \sigma_i^2 = \frac{1}{2} \sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{2 p_i}$

平均值的方差估值 $\hat{\sigma}_{\bar{L}_i}^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{2 p_i}$

例1 一水准路线分6段观测，其往返观测结果列于下表：

段号	高 差(m)		S_i (km)	$p_i = 1/S_i$	高差平均值 (m)	d_i (mm)	d_i^2	$p_i d_i^2$	$\hat{\sigma}_{\bar{h}_i}$
	h'	h''							
1	4.321	4.305	2.0	0.50	4.313	16	256	128.0	7
2	-0.756	-0.770	5.0	0.20	-0.763	14	196	39.2	11
3	-2.466	-2.442	2.5	0.40	-2.454	-24	576	230.4	8
4	-8.964	-8.980	4.0	0.25	-8.972	16	256	64.0	10
5	6.404	6.430	5.0	0.20	6.417	-26	676	135.2	11
6	4.892	4.880	3.3	0.30	4.886	12	144	43.2	9
Σ								640.0	

- 试求:(1) 每段高差平均值及其中误差。
- (2) 该条水准路线全线高差平均值及其中误差。

解：(1) 各段高差往返观测值的权 p_i 、平均值 $\bar{h}_i$ 及中误差计算如上表

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n p_i d_i^2 = \frac{1}{2 \times 6} \times 640 = 53.3 (\text{mm}^2)$$

$$\hat{\sigma}_0 = 7.3 \text{mm}$$

$$\bar{h}_i = \frac{1}{2} (h_i' + h_i'')$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{h}_i} = \frac{1}{\sqrt{2 p_i}} \hat{\sigma}_0$$

(2) 水准路线总高差 h_z 及其中误差估值为：

$$h_z = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 L + \bar{h}_6 = 3.427 (\text{m})$$

$$\hat{\sigma}_{h_z} = \sqrt{\sigma_{\bar{h}_1}^2 + \sigma_{\bar{h}_2}^2 + \dots + \sigma_{\bar{h}_6}^2} = 23 (\text{mm})$$

小结

1、独立同精度真误差估算方差

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2$$

2、独立不同精度真误差估算方差

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \Delta_i^2$$

3、由一组三角形闭合差估算测角中误差

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n w_i^2$$

4、由一组双观测值互差估算中误差

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n p_i d_i^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\sigma}_0^2 \\ \hat{\sigma}_\beta^2 \\ \hat{\sigma}_0^2 \end{array} \right\} \hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}_0^2 / p_i$$

作业：

第二章习题 2, 4, 5, 8, 11, 13, 15, 18

以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！

第二章 误差与协方差传播

§ 2-1 观测误差传播规律

§ 2-2 协方差传播规律

§ 2-3 协方差传播律的应用

§ 2-4 权与定权的常用方法

§ 2-5 协因数和协因数传播律

§ 2-6 方差的估算

§ 2-7 系统误差的传播

§ 2-7 系统误差的传播

1、综合误差评价

2、系统误差的传播

3、系统误差与方差的联合传播

1、综合误差评价 ($\Omega = \Delta + \varepsilon$)

(1) 准确度指标

准确度：L的误差均值 $E(L)$ 与真值的偏离程度。

误差定义 $\Omega = \tilde{L} - L$ $E(\Omega) = \tilde{L} - E(L)$

当L含 ε 、 Δ 时 $\Omega = \Delta + \varepsilon$ $E(\Omega) = E(\varepsilon + \Delta) = \varepsilon$

故 $\varepsilon = \tilde{L} - E(L)$

系统误差可作为准确度指标



(2) 精确度指标- L的均方误差MSE(L)

$$\begin{aligned} MSE(L) &= E(\Omega^2) = E(\tilde{L} - L)^2 \\ &= E[\tilde{L} - E(L) + E(L) - L]^2 = E[\varepsilon + E(L) - L]^2 \\ &= \varepsilon^2 + 2\varepsilon E[E(L) - L] + E[E(L) - L]^2 \\ &= \varepsilon^2 + 2\varepsilon[E(L) - E(L)] + E[E(L) - L]^2 \\ &= \varepsilon^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

2、系统误差的传播

已知 L_i 的综合误差为 $\Omega_i = \varepsilon_i + \Delta_i$ ， Z 是观测向量 L 的一个线性函数，

则 Z 的综合误差 Ω_Z 为

$$Z = k_1 L_1 + k_2 L_2 \cdots + k_n L_n + k_0$$

综合误差的传播

$$\Omega_Z = \tilde{Z} - Z = k_1 \Omega_1 + k_2 \Omega_2 \cdots + k_n \Omega_n = \sum_{i=1}^n k_i \Omega_i = \sum_{i=1}^n (k_i \varepsilon_i + k_i \Delta_i)$$

$$\varepsilon_Z = \underline{E(\varepsilon_Z + \Delta_Z) = E(\Omega_Z)} = E \sum_{i=1}^n (k_i \varepsilon_i + k_i \Delta_i) = \sum_{i=1}^n [E(k_i \varepsilon_i) + E(k_i \Delta_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^n k_i \varepsilon_i \quad \text{系统误差的传播}$$

观测值的系统误差，对观测值函数产生影响。

3、系统误差与方差的联合传播

1) 系统误差 ε 为非随机常数（此前均这样假设）

已知 L_i 的综合误差 $\Omega_i = \varepsilon_i + \Delta_i$ 方差 σ_i^2 ， X 是独立观测向量 L 的一个线性函数，则 Z 的均方误差 $MSE(Z)$ 为

$$Z = k_1 L_1 + k_2 L_2 + \cdots + k_n L_n + k_0$$

$$MSE(Z) = E(Z - \tilde{Z})^2 = E(\Omega_Z^2)$$

$$= E[\underbrace{Z - E(Z)}_{\text{系统误差}} + \underbrace{E(Z) - \tilde{Z}}_{\text{随机误差}}]^2$$

$$= E[Z - E(Z)]^2 + E[E(Z) - \tilde{Z}]^2 + 2 \underbrace{E[Z - E(Z)]}_{0} \underbrace{E[E(Z) - \tilde{Z}]}_{-\varepsilon_Z}$$

$$= D_{ZZ} + \varepsilon_Z^2$$

$$= \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n k_i \varepsilon_i \right)^2$$

$$\begin{aligned} D_{ZZ} &= E(Z - E(Z))^2 = K D_{LL} K^T \\ &= (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2 \end{aligned}$$

此即系统误差与方差的联合传播规律

3、系统误差与方差的联合传播

2) 系统误差 ε 为随机变量

已知 L_i 的综合误差 $\Omega_i = \varepsilon_i + \Delta_i$ 方差 σ_i^2 ， X 是独立观测向量 L 的一个线性函数，则 Z 的均方误差 $MSE(Z)$ 为

$$Z = k_1 L_1 + k_2 L_2 \cdots + k_n L_n + k_0$$

$$MSE(Z) = E(Z - \tilde{Z})^2 = E(\Omega_Z^2)$$

$$= D_{ZZ} + E(\varepsilon_Z^2)$$

$$= \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n k_i^2 \varepsilon_i^2$$

对比： ε_i 为非随机常量：

$$MSE(Z) = E(Z - \tilde{Z})^2 = E(\Omega_Z^2)$$

$$= D_{ZZ} + \varepsilon_Z^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n k_i \varepsilon_i\right)^2$$

随机系统误差的问题相当于按偶然误差处理。

误差、方差、均方误差的区别

名称	简易含义	英文	符号	定义、运算式
观测误差、 误差、真误差	观测值与其真值的偏差	error	Ω	$\Omega = \tilde{L} - L$ $\Omega = \varepsilon + \Delta + \Delta_{\text{粗}}$
方差	偏差平方的均值	variance	$D(L)$ 正态 L 为 σ^2	$D(L) = E(L - E(L))^2$
协方差		covariance	$D_{L_1 L_2} \sigma_{12}$	$D_{L_1 L_2} = E(L_1 - E(L_1))(L_2 - E(L_2))$
标准差、 均方差 、中误差	方差的平方根	standard deviation	$\sqrt{D(L)}$, 或 σ	
均方误差	误差平方和的平均值	mean squared error	$MSE(L)$	$MSE(L) = E(\Omega^2)$

以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！
