
误差理论与测量平差基础

主讲： 戴华阳 教授
中国矿业大学（北京）

第九章 平差结果的统计性质

§9-1 平差结果的统计性质

- 1、估计量 $\hat{L}, \hat{X}$ 的无偏性
 - 2、估计量 $\hat{L}$ 的最优性-方差最小
 - 3、估计量 $\hat{\sigma}_0^2 = V^T P V / r$ 的无偏性
-

§8-1 平差结果的统计性质

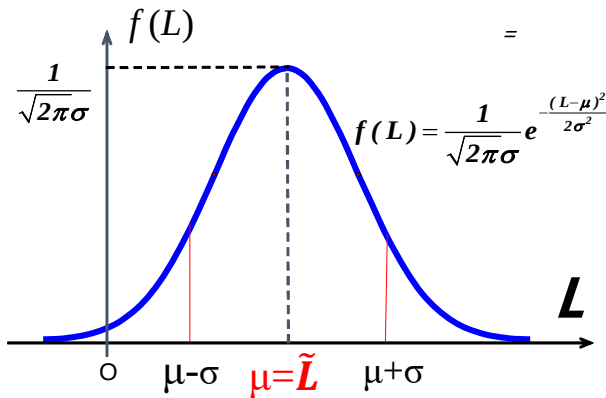
引言

观测值正态随机变量 $L \sim N(\mu, \sigma^2)$

由正态分布的特性有: $E(L) = \mu$

又 $E(L)$ 只含 Δ $E(\tilde{L} - \Delta) = \tilde{L}$

故 $E(L) = \mu$ 只含 Δ $\tilde{L}$
 $\hat{L} = \hat{\mu} = \hat{\tilde{L}}$



平差的结果: $\hat{L}, \hat{X}, \hat{\sigma}_0$ —即是分布参数 $\mu=\tilde{L}, \tilde{X}, \sigma_0$ 的估计量.

现在来评价这些估计量的性质 (无偏性、一致性、有效性)

§9-1 平差结果的统计性质

平差的结果： $\hat{L}, \hat{X}, \hat{\sigma}_0$ —是分布参数 $\mu=\tilde{L}, \tilde{X}, \sigma_0$ 的估计值. (L只含 Δ)

1、估计量 $\hat{L}, \hat{X}$ 的无偏性 $L_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$

$$\hat{L} = L + V \quad \begin{cases} V = QA^T K = -QA^T N_{aa}^{-1} W & \text{条件平差} \\ V = B\hat{x} - l = (BN_{BB}^{-1}B^T P - I) l & \text{间接平差} \end{cases}$$

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x} \quad \begin{cases} \text{no } \hat{X} & \text{条件平差} \\ \hat{x} = (B^T P B)^{-1} B^T P l & \text{间接平差} \end{cases}$$

$$E(L) \stackrel{\text{only } \Delta}{=} E(\tilde{L} - \Delta) = \tilde{L} - E(\Delta) = \tilde{L}$$

$L = \tilde{L} - \Delta$ 是参数 $\mu (= \tilde{L})$ 的无偏估计

$$E(\hat{L}) = E(L + V) = \tilde{L} + E(V) = \tilde{L}?$$

$L = L + V$ 是参数 $\mu (= \tilde{L})$ 的无偏估计吗?

还有, $\hat{x}, \hat{X}$ 是 $\tilde{x}, \tilde{X}$ 的无偏估计吗?

§8-1 平差结果的统计性质

1、估计量 $\hat{L}, \hat{X}$ 的无偏性

(1) 按条件平差

$$\begin{aligned} E(W) &= E(AL + A_0) = AE(L) + A_0 \\ &= A\tilde{L} + A_0 = 0 \end{aligned}$$

$$E(V) = -QA^T N_{aa}^{-1} E(W) = 0$$

$$E(\hat{L}) = E(L + V) = E(L) + E(V) = \tilde{L}$$

因此 $\hat{L} = L - QA^T N_{aa}^{-1} W$ 是分布参数 $\mu (= \tilde{L})$ 的无偏估计

条件平差模型和结果

$$F(\hat{L}) \approx A\hat{L} + A_0 = 0$$

$$W = F(L) \approx AL + A_0$$

$$V = QA^T K = -QA^T N_{aa}^{-1} W$$

1、估计量 $\hat{L}, \hat{X}$ 的无偏性

(2) 按间接平差

$$\begin{aligned} E(l) &= E(L) - E(BX^0 + d) \\ &= \tilde{L} - (BX^0 + d) \\ &= B\tilde{X} + d - BX^0 - d = B\tilde{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\hat{x}) &= N_{BB}^{-1} B^T P E(l) \\ &= N_{BB}^{-1} B^T P B\tilde{x} = \tilde{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(V) &= E(B\hat{x} - l) = BE(\hat{x}) - E(l) \\ &= B\tilde{x} - B\tilde{x} = 0 \end{aligned}$$

$$E(\hat{L}) = E(L + V) = E(L) + E(V) = \tilde{L}$$

因此 $\hat{L} = L + (BN_{BB}^{-1}B^TP - I)l$

是分布参数 $\mu (= \tilde{L})$ 的无偏估计量

间接平差模型和结果

$$\hat{L} = F(\hat{X}) \approx B\hat{X} + d \quad V = B\hat{x} - l$$

$$l = L - F(X^0) \approx L - (BX^0 + d)$$

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x} \quad \tilde{X} = X^0 + \tilde{x}$$

$$\hat{x} = N_{BB}^{-1} B^T P l$$

$$V = B\hat{x} - l = (BN_{BB}^{-1}B^TP - I)l$$

而且 $E(\hat{x}) = \tilde{x}$
 $E(\hat{X}) = E(X_0 + \hat{x}) = X_0 + \tilde{x} = \tilde{X}$
 $\hat{x} = N_{BB}^{-1} B^T P l \quad \hat{X} = X^0 + \hat{x}$
分别是 $\tilde{x}$ 、 $\tilde{X}$ 的无偏估计量

2、估计量 $\hat{L}$ 的最优性-方差最小

$$\begin{cases} \hat{L} = L - QA^T N_{aa}^{-1} W & \text{条件平差} \\ \hat{L} = L + (BN_{BB}^{-1} B^T P - I) l & \text{间接平差} \end{cases}$$

若 这样的 $\hat{L}$ 方差最小, 则 $\hat{L}$ 最有效
最有效+无偏, 则 $\hat{L}$ 最优

现要证 $\hat{L}$ 的方差最小, 即证 $tr(D_{\hat{L}\hat{L}}) = \min$ 或 $tr(Q_{\hat{L}\hat{L}}) = \min$

用反证法。设 $\hat{L}$ 方差非最小, 另有 $\hat{L}'$ 方差最小。按条件平差证

$$\hat{L}' = L + G W = (I \quad G) \begin{pmatrix} L \\ W \end{pmatrix} \quad G_{nr}$$

$$E(\hat{L}') = E(L + G W) = E(L) + G E(W) = \hat{L}^c$$

故 $\hat{L}' = L + G W$ 也是 $\mu (= \tilde{L})$ 的无偏估计量

条件平差模型和结果

$$F(\hat{L}) \approx A\hat{L} + A_0 = 0$$

$$F(\tilde{L}) \approx A\tilde{L} + A_0 = 0$$

$$W = F(L) \approx AL + A_0$$

$$V = QA^T K = -QA^T N_{aa}^{-1} W$$

$$\hat{L} = L - QA^T N_{aa}^{-1} W$$

$$Q_{WW} = AQA^T = N_{aa}$$

$$Q_{LW} = QA^T = Q_{WL}^T$$

2、估计量 $\hat{L}$ 的最优性-方差最小

$$\hat{L}' = L + G W = (I \quad G) \begin{pmatrix} L \\ W \end{pmatrix} \quad \boxed{G_{nr}}$$

$$\begin{aligned} Q_{\hat{L}'\hat{L}'} &= (I \quad G) \begin{pmatrix} Q & Q_{LW} \\ Q_{WL} & Q_{WW} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^T \\ G^T \end{pmatrix} \\ &= Q + GAQ + QA^T G^T + GN_{aa} G^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \Phi(G) &= \text{tr}(Q_{\hat{L}'\hat{L}'}) \\ &= \text{tr}(Q) + \text{tr}(GAQ) + \text{tr}(QA^T G^T) + \text{tr}(GN_{aa} G^T) \end{aligned}$$

现求G, 使 $\Phi(G) = \text{tr}(Q_{\hat{L}'\hat{L}'}) = \min$

$$\text{必要条件为 } \frac{\partial \Phi}{\partial G} = 2QA^T + 2GN_{aa} = 0$$

$$\text{即 } G = -QA^T N_{aa}^{-1}$$

$$\text{代入 } \hat{L}' = L + G W$$

$$\begin{aligned} \text{得 } \hat{L}' &= L + G W \\ &= L - QA^T N_{aa}^{-1} W = \hat{L} \end{aligned}$$

所以, 条件平差所求 $\hat{L}$ 的方差最小

即 $\hat{L}$ 为 $\mu=\tilde{L}$ 的最优无偏估计。

3、估计量 $\hat{\sigma}_0^2 = V^T P V / r$ 的无偏性

(1) 按条件平差

$$E(W) = A\tilde{L} + A_0 = 0$$

$$E(V) = -QA^T N_{aa}^{-1} E(W) = 0$$

$$E(\underline{\underline{V^T P V}}_{11}) = E^T(V)P E(V) + tr(PD_{VV})$$

$$= \sigma_0^2 tr(PQ_{VV}) = \sigma_0^2 tr(P QA^T N_{aa}^{-1} AQ)$$

$$= \sigma_0^2 tr(\underline{\underline{A^T N_{aa}^{-1} AQ}}_{nr \quad rn})$$

$$= \sigma_0^2 tr(\underline{\underline{N_{aa}^{-1} AQ A^T}}_{rn \quad nr})$$

$$= \sigma_0^2 tr(\underline{\underline{I}}_{rr}) = r \sigma_0^2$$

$$E(\frac{V^T P V}{r}) = \sigma_0^2$$

(2) 按间接平差

$$E(V) = 0$$

$$E(V^T P V) = E^T(V)P E(V) + tr(PD_{VV})$$

$$= \sigma_0^2 tr(PQ_{VV}) = \sigma_0^2 tr[P (Q - BN_{BB}^{-1} B^T)]$$

$$= \sigma_0^2 tr(\underline{\underline{I}}_{nn}) - \sigma_0^2 tr(\underline{\underline{P B N_{BB}^{-1} B^T}}_{nt \quad tn})$$

$$= \sigma_0^2 tr(\underline{\underline{I}}_{nn}) - \sigma_0^2 tr(\underline{\underline{N_{BB}^{-1} B^T P B}}_{tn \quad nt})$$

$$= \sigma_0^2 tr(\underline{\underline{I}}_{rr}) - \sigma_0^2 tr(\underline{\underline{I}}_{tt})$$

$$= (n - t) \sigma_0^2 = r \sigma_0^2$$

因此 $\frac{V^T P V}{r} = \hat{\sigma}_0^2$ 是参数 σ_0^2 的无偏估计量

§8-1 平差结果的统计性质

小结

- 1) 本节证明了，按照基本平差方法得出的参数具有无偏性、线性最优性。说明采用 $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min$ 的平差原则合适。
 - 2) 注意获得这些结果的前提是，观测值 $\mathbf{L}$ 只含偶然误差 Δ ，变量 $\mathbf{L}$ 服从正态分布。
-

以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！

第十章 点位精度与误差椭圆

§10-1 点位误差

§10-2 点位方差

§10-3 误差曲线与误差椭圆

§10-4 计算示例

$P(x, y)$ 的位置由两坐标确定， P 点的误差和精度怎样？

§10-1 点位误差

只含 Δ 观测值 L 的误差 $\Delta = \tilde{L} - L$

1、点位误差定义

如图，观测或平差得到的点 $P(x, y)$ 与其真值点 $\tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y})$ 存在误差，称为 P 点的**点位误差 ΔP** 。

x 的误差 Δx 即是 ΔP 在 x 方向的分量，

y 的误差 Δy 即是 ΔP 在 y 方向的分量。

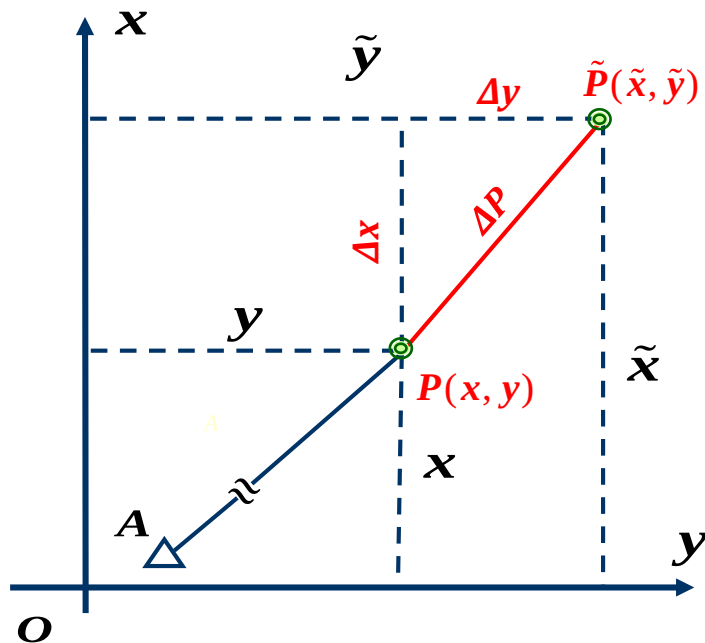
点位误差计算式

$$\Delta P = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\Delta x = \tilde{x} - x$$

$$\Delta y = \tilde{y} - y$$

点位误差
 $\Delta P > 0$



§10-1 点位误差

2、不同方向的点位误差分布

ΔP 在x方向的分量为 Δx ，在y方向的分量为 Δy

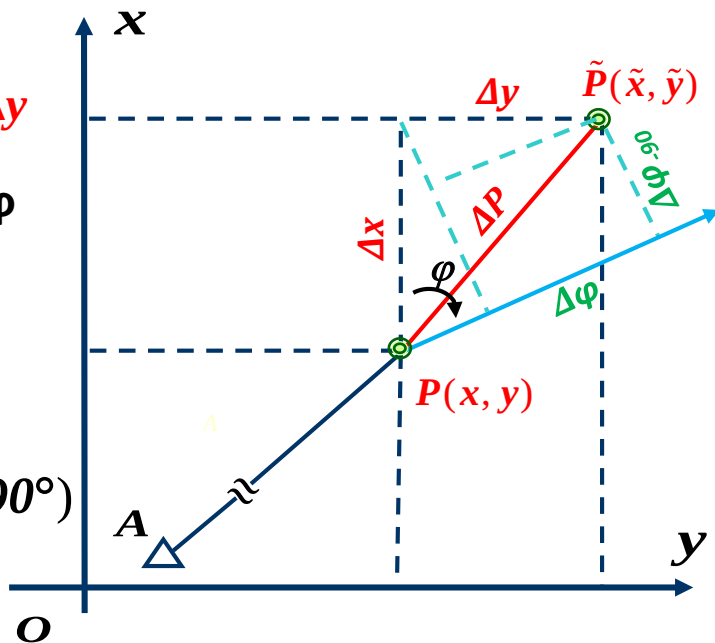
ΔP 在任意 φ 方向（方位角 φ ）的点位误差 $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \Delta x \cos \varphi + \Delta y \sin \varphi$$

ΔP 在 $\varphi-90^\circ$ 、 $\varphi+90^\circ$ 方向的点位误差为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{-90} &= \Delta x \cos(\varphi - 90^\circ) + \Delta y \sin(\varphi - 90^\circ) \\ &= \Delta x \sin \varphi - \Delta y \cos \varphi\end{aligned}$$

$$\Delta\varphi_{+90} = -\Delta x \sin \varphi + \Delta y \cos \varphi$$



§10-1 点位误差

$$\Delta P^2 = \Delta \varphi^2 + \Delta \varphi_{\pm 90}^2$$

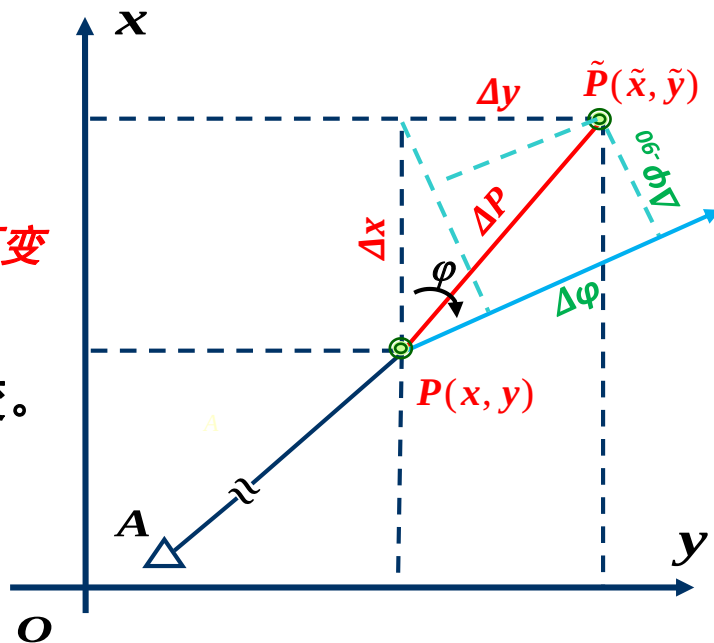
$$= \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$= \Delta x'^2 + \Delta y'^2 \quad \text{坐标变换前后} \Delta P \text{ 不变}$$

$$= \Delta s^2 + \Delta t^2 \quad \text{切向、法向误差平方和} \text{ 不变}$$

ΔP^2 不变特征：两垂直方向的误差平方和不变。

这为计算 ΔP 提供了多种方法。



以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！

第十章 点位精度与误差椭圆

§10-1 点位误差

§10-2 点位方差

§10-3 误差曲线与误差椭圆

§10-4 计算示例

§10-2 点位方差

1、点位方差

点 $P(x, y)$ ，真值点 $\tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y})$

$$x \text{ 的方差 } \sigma_x^2 = E(x - \mu)^2 \stackrel{\text{only } \Delta}{=} E(x - \tilde{x})^2 = E(\Delta x^2)$$

$$y \text{ 的方差 } \sigma_y^2 = E(\Delta y^2)$$

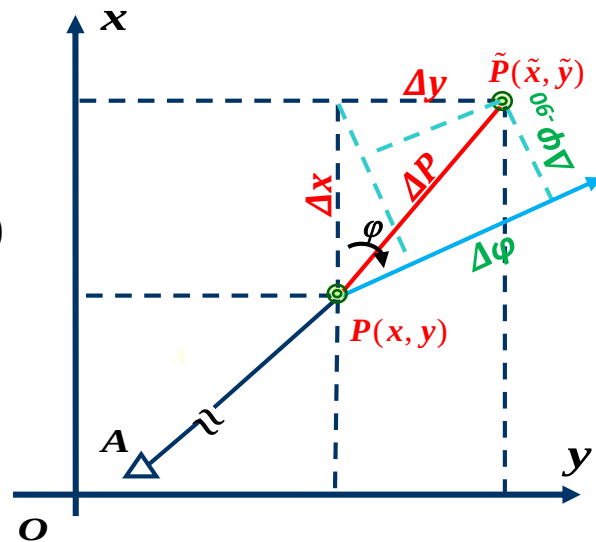
点 $P(x, y)$ **点位方差定义**

$$\sigma_P^2 = E(\Delta P^2)$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } \sigma_P^2 &= E(\Delta x^2 + \Delta y^2) \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \sigma_P^2 = \sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2 = \sigma_s^2 + \sigma_t^2$$

$$\begin{aligned} \Delta P^2 &= \Delta \varphi^2 + \Delta \varphi_{\pm 90}^2 \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ &= \Delta x'^2 + \Delta y'^2 \\ &= \Delta s^2 + \Delta t^2 \end{aligned}$$



点位方差总量不变性

§10-2 点位方差

2、任意方向的点位方差

任意方向 φ （方位角）的点位误差 $\Delta\varphi$

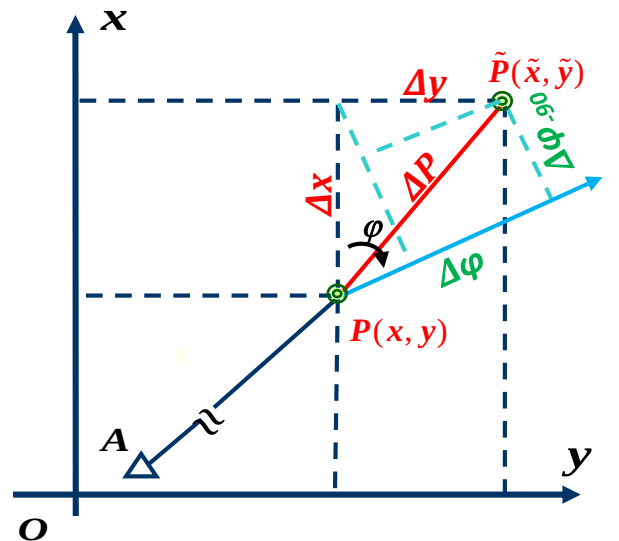
$$\Delta\varphi = \Delta x \cos \varphi + \Delta y \sin \varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

方向 φ 的点位协因数为

$$\begin{aligned} Q_{\varphi\varphi} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= Q_{xx} \cos^2 \varphi + Q_{yy} \sin^2 \varphi + Q_{xy} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

φ 方向的点位方差，即 $\Delta\varphi$ 的方差

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^2 &= \sigma_0^2 Q_{\varphi\varphi} \\ &= \sigma_x^2 \cos^2 \varphi + \sigma_y^2 \sin^2 \varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi \end{aligned}$$



$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} Q_{\Delta x \Delta x} &= Q_{xx} \\ Q_{\Delta y \Delta y} &= Q_{yy} \\ Q_{\Delta x \Delta y} &= Q_{xy} = Q_{yx} \end{aligned}$$

§10-2 点位方差

3、点位方差的极值

φ 方向的点位方差与 φ 有关

$$\sigma_{\varphi}^2 = \sigma_0^2 Q_{\varphi\varphi} = \sigma_0^2 (Q_{xx} \cos^2 \varphi + Q_{yy} \sin^2 \varphi + Q_{xy} \sin 2\varphi)$$

(1) 点位方差的极值点 φ_0

设在 φ_0 方向 σ_{φ}^2 有极大值 E^2 、极小值 F^2

$$\begin{cases} \text{当 } \varphi_0 = \varphi_E \text{ 时, } E^2 = \sigma_{\varphi_E}^2 = \sigma_0^2 Q_{EE} \\ \text{当 } \varphi_0 = \varphi_F \text{ 时, } F^2 = \sigma_{\varphi_F}^2 = \sigma_0^2 Q_{FF} \end{cases}$$

σ_{φ}^2 取极值的必要条件为

$$\left(\frac{\partial Q_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \right)_{\varphi_0} = -2Q_{xx} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2Q_{yy} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2Q_{xy} \cos 2\varphi_0 = 0$$

整理得极值点 φ_0

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$$

由于

$$\tan 2\varphi_0 = \tan(2\varphi_0 + 180^\circ)$$

故 φ_0 和 $\varphi_0 + 90^\circ$

均为极值点

φ_E 与 φ_F 相差 90°

3、点位方差的极值

(2) 点位方差的极值

极值点

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$$

$$\cos^2 2\varphi_0 = \frac{1}{1 + \tan^2 2\varphi_0} = \frac{(Q_{xx} - Q_{yy})^2}{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}$$

$$\sin 2\varphi_0 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 2\varphi_0} = \pm \frac{2Q_{xy}}{\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}}$$

令 $K = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} > 0$

有 $\sin 2\varphi_0 = \pm \frac{2Q_{xy}}{K} \quad \cos 2\varphi_0 = \pm \frac{(Q_{xx} - Q_{yy})}{K}$

$$\cos^2 \varphi_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi_0) \quad \sin^2 \varphi_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi_0)$$

极值 $\sigma_{\varphi_0}^2 = \sigma_0^2 (Q_{xx} \cos^2 \varphi_0 + Q_{yy} \sin^2 \varphi_0 + Q_{xy} \sin 2\varphi_0)$

$$= \frac{\sigma_0^2}{2} [(Q_{xx} + Q_{yy}) + (Q_{xx} - Q_{yy}) \cos 2\varphi_0 + 2Q_{xy} \sin 2\varphi_0]$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{2} [(Q_{xx} + Q_{yy}) + \frac{2Q_{xy}}{\tan 2\varphi_0} \cos 2\varphi_0 + 2Q_{xy} \sin 2\varphi_0]$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} + \frac{2Q_{xy}}{\sin 2\varphi_0}) = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} \pm K)$$

方差极大值 $E^2 = \sigma_{\varphi_E}^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} + K)$

$$F^2 = \sigma_{\varphi_F}^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} - K)$$

点位方差 $\sigma_P^2 = E^2 + F^2$ φ_E 与 φ_F 相差 90°

$$= \frac{\sigma_0^2}{2} (2Q_{xx} + 2Q_{yy}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

点位方差极大值、极小值

$$\begin{aligned} E^2 &= \sigma_{\varphi_E}^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} + K) \\ &= \sigma_0^2 Q_{\varphi_E \varphi_E} = \sigma_0^2 Q_{EE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^2 &= \sigma_{\varphi_F}^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} - K) \\ &= \sigma_0^2 Q_{\varphi_F \varphi_F} = \sigma_0^2 Q_{FF} \end{aligned}$$

点位协因数极大值、极小值为

$$Q_{EE} = \frac{1}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} + K)$$

$$Q_{FF} = \frac{1}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} - K)$$

$$K = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}$$

3、点位方差的极值

(3) 点位方差的极值方向

方法一： Q_{xy} 分析法

$$Q_{\varphi_0\varphi_0} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} \pm K) = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} + \frac{2Q_{xy}}{\sin 2\varphi_0})$$

$$Q_{\hat{X}\hat{X}} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{\sin 2\varphi_0}{\cos 2\varphi_0} = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$$

1) 当 $Q_{xy} > 0$ 时

$$\begin{cases} \text{若 } \sin 2\varphi_0 > 0, \text{ 则 } \varphi_E = \varphi_0, \varphi_F = \varphi_0 + 90^\circ, Q_{EE} = Q_{\varphi_0\varphi_0} \\ \text{若 } \sin 2\varphi_0 < 0, \text{ 则 } \varphi_F = \varphi_0, \varphi_E = \varphi_0 + 90^\circ, Q_{FF} = Q_{\varphi_0\varphi_0} \end{cases}$$

2) 当 $Q_{xy} < 0$ 时

$$\begin{cases} \text{若 } \sin 2\varphi_0 > 0, \text{ 则 } \varphi_F = \varphi_0, \varphi_E = \varphi_0 + 90^\circ, Q_{FF} = Q_{\varphi_0\varphi_0} \\ \text{若 } \sin 2\varphi_0 < 0, \text{ 则 } \varphi_E = \varphi_0, \varphi_F = \varphi_0 + 90^\circ, Q_{EE} = Q_{\varphi_0\varphi_0} \end{cases}$$

3、点位方差的极值

(3) 点位方差的极值方向

方法二： Q_{XX} 特征值分析法

$$Q_{\hat{X}\hat{X}} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix}$$

$Q_{EE}=\lambda_1, Q_{FF}=\lambda_2$ 是 Q_{XX} 的两个特征值

λ_1, λ_2 对应的特征向量 e_1, e_2 为

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{x_1} \\ e_{y_1} \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{x_2} \\ e_{y_2} \end{pmatrix}$$

1) 由特征值的意义可知

$$(Q_{XX} - \lambda_1 I)e_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} - Q_{EE} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} - Q_{EE} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{x_1} \\ e_{y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(Q_{xx} - Q_{EE})e_{x_1} + Q_{xy}e_{y_1} = 0$$

$$(Q_{xx} - Q_{EE})e_{y_1} + Q_{xy}e_{x_1} = 0$$

$$\text{所以 } \tan \varphi_E = \frac{e_{y_1}}{e_{x_1}} = \frac{Q_{EE} - Q_{xx}}{Q_{xy}} = \frac{Q_{xy}}{Q_{EE} - Q_{yy}}$$

$$2) \text{ 由 } (Q_{XX} - \lambda_2 I)e_2 = 0$$

$$\text{得 } \tan \varphi_F = \frac{e_{y_2}}{e_{x_2}} = \frac{Q_{FF} - Q_{xx}}{Q_{xy}} = \frac{Q_{xy}}{Q_{FF} - Q_{yy}}$$

由此，得到点位方差极大值点 φ_E 和极小值点 φ_F 。

4、用极值E、F表示 ψ 方向的点位方差

如图，以x为基准时，任意方向的方位角 φ
方差最大方向E的方位角 φ_E
以E方向为基准时，任意方向的角度为 ψ

$$\varphi = \varphi_E + \psi$$

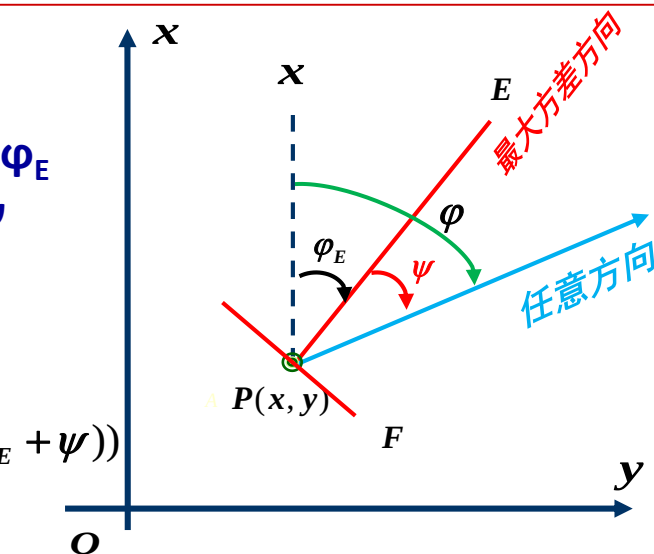
$$\sigma_{\psi}^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \varphi + \sigma_y^2 \sin^2 \varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$= \sigma_x^2 \cos^2 (\varphi_E + \psi) + \sigma_y^2 \sin^2 (\varphi_E + \psi) + \sigma_{xy} \sin 2(\varphi_E + \psi)$$

$$= (\sigma_x^2 \cos^2 \varphi_E + \sigma_y^2 \sin^2 \varphi_E + \sigma_{xy} \sin 2\varphi_E) \cos^2 \psi \\ + (\sigma_x^2 \sin^2 \varphi_E + \sigma_y^2 \cos^2 \varphi_E - \sigma_{xy} \sin 2\varphi_E) \sin^2 \psi$$

$$- \frac{1}{2} [(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \sin 2\varphi_E - 2\sigma_{xy} \cos 2\varphi_E] \sin 2\psi$$

$$= E^2 \cos^2 \psi + F^2 \sin^2 \psi$$



$$(Q_{xx} - Q_{yy}) \sin 2\varphi_E = 2Q_{xy} \cos 2\varphi_E$$

由此，可用极值E、F表示 σ_{ψ}^2

4、用极值E、F表示 ψ 方向的点位方差

参照 $\Delta\varphi = \Delta x \cos\varphi + \Delta y \sin\varphi$

$$Q_{\varphi\varphi} = Q_{xx}\cos^2\varphi + Q_{yy}\sin^2\varphi + Q_{xy}\sin 2\varphi$$

得 ψ 方向误差 $\Delta\psi$ 及协因数 $Q_{\psi\psi}$

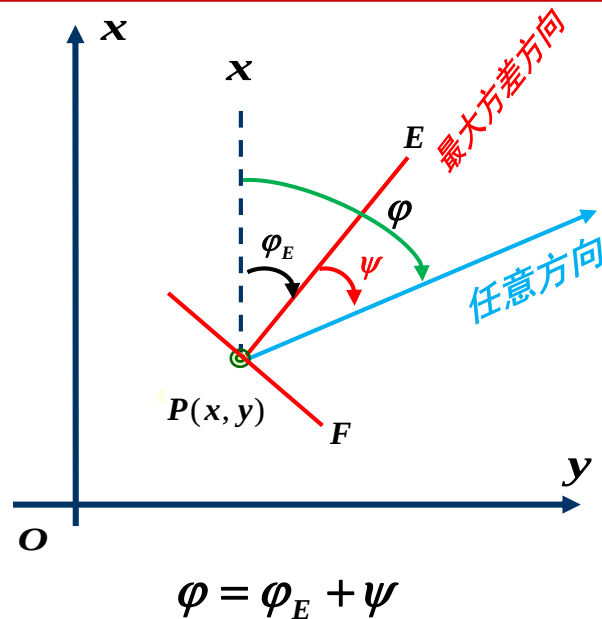
$$\Delta\psi = \Delta E \cos\psi + \Delta F \sin\psi$$

$Q_{EF}=0$ 另证

$$\begin{aligned} Q_{\psi\psi} &= Q_{EE}\cos^2\psi + Q_{FF}\sin^2\psi + Q_{EF}\sin 2\psi \\ &= Q_{EE}\cos^2\psi + Q_{FF}\sin^2\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\psi}^2 &= \sigma_0^2 Q_{\psi\psi} = \sigma_0^2 (Q_{EE}\cos^2\psi + Q_{FF}\sin^2\psi) \\ &= E^2\cos^2\psi + F^2\sin^2\psi \end{aligned}$$

由此，可用极值E、F表示 σ_{ψ}^2



证明: ΔE 与 ΔF 不相关 $Q_{EF} = 0$

方差极值方向 φ_E , φ_F 的点位误差 ΔE , ΔF

$$\begin{cases} \Delta E = \Delta x \cos \varphi_E + \Delta y \sin \varphi_E \\ \Delta F = \Delta x \cos \varphi_F + \Delta y \sin \varphi_F = -\Delta x \sin \varphi_E + \Delta y \cos \varphi_E \end{cases}$$

取 $\varphi_F = \varphi_E + 90^\circ$

点位误差 ΔE , ΔF 的协因数

$$\begin{aligned} Q_{EF} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_E & \sin \varphi_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \varphi_E \\ \sin \varphi_E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q_{xx} \cos \varphi_E + Q_{yx} \sin \varphi_E & Q_{xy} \cos \varphi_E + Q_{yy} \sin \varphi_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \varphi_E \\ \cos \varphi_E \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}(Q_{xx} - Q_{yy}) \sin 2\varphi_E + Q_{xy} \cos 2\varphi_E \\ &= -\frac{1}{2} \times 2Q_{xy} \cos 2\varphi_E + Q_{xy} \cos 2\varphi_E = 0 \end{aligned}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \tan 2\varphi_E = \frac{\sin 2\varphi_E}{\cos 2\varphi_E} = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$$

$$\Rightarrow (Q_{xx} - Q_{yy}) \sin 2\varphi_E = 2Q_{xy} \cos 2\varphi_E$$

$$Q_{EF} = 0$$

点位误差 ΔE , ΔF 不相关

5、计算点位中误差的步骤

已知：P点坐标(x, y)的协因数阵 Q_{xx} , 单位权方差 σ_0^2 或 $\hat{\sigma}_0^2$

1) 求中误差极值E、F

$$K = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}$$

$$Q_{EE} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} + K)$$

$$Q_{FF} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} - K)$$

$$E = \sigma_0 \sqrt{Q_{EE}}$$

$$F = \sigma_0 \sqrt{Q_{FF}}$$

2) 求中误差极值方向 φ_E 、 φ_F

$$\tan \varphi_E = \frac{Q_{xy}}{Q_{EE} - Q_{yy}} \quad \tan \varphi_F = \frac{Q_{xy}}{Q_{FF} - Q_{yy}}$$

φ_E 、 φ_F 各有两个解 ($0^\circ \sim 360^\circ$)

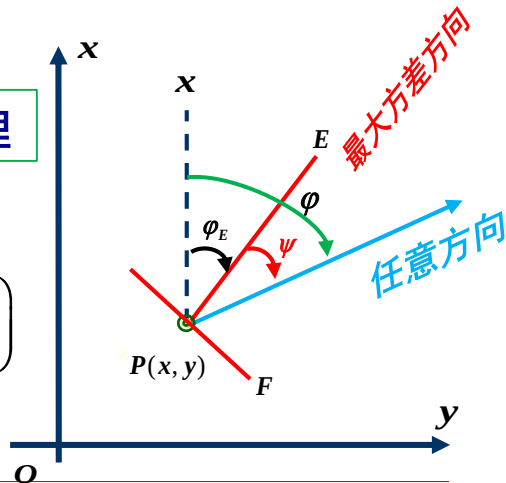
3) 求任意方向的中误差

$$\sigma_\varphi^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \varphi + \sigma_y^2 \sin^2 \varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_\psi^2 = E^2 \cos^2 \psi + F^2 \sin^2 \psi$$

注意：单位统一，小数取位合理

$$Q_{xx} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix}$$



以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！

第十章 点位精度与误差椭圆

§10-1 点位误差

§10-2 点位方差

§10-3 误差曲线与误差椭圆

§10-4 计算示例

$P(x, y)$ 的位置由两坐标确定， P 点的误差和精度怎样？

1、点位（中）误差曲线

P点坐标(x, y)的方差阵

$$D_{\hat{X}\hat{X}} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

φ 方向的点位方差为

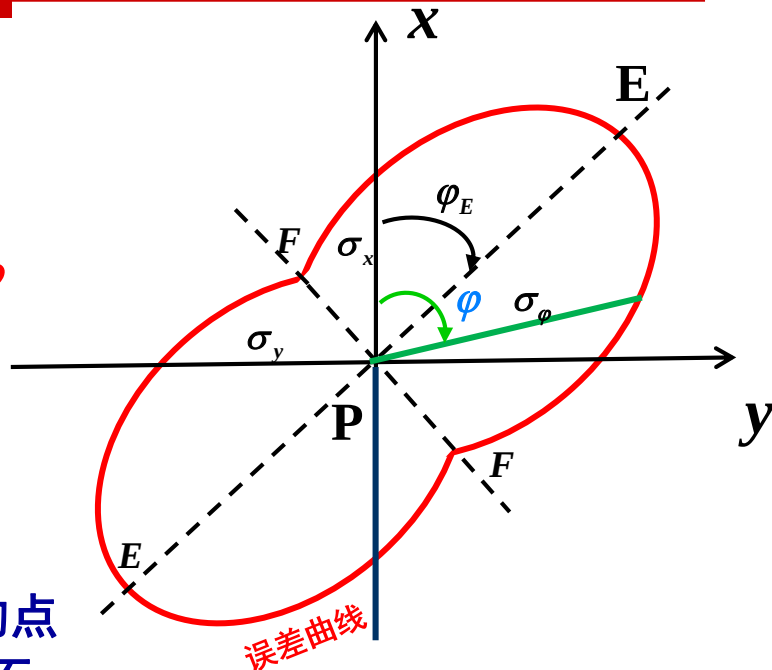
$$\sigma_\varphi^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \varphi + \sigma_y^2 \sin^2 \varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi$$

φ 方向的点位中误差是方位角 φ 的函数

$$\sigma_\varphi = f(\varphi) \quad \varphi \in [0^\circ, 360^\circ]$$

P点点位误差曲线是：

以P点为中心， σ_φ 为矢径，按一定比例绘制的点位中误差分布曲线。它反映了点位中误差在不同方向的分布情况。误差曲线关于中心对称。



2、点位（中）误差椭圆

P点坐标(x, y)的方差阵 $D_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$

P点点位**误差曲线**，反映了点位中误差在不同方向的分布情况。误差曲线描述不便。

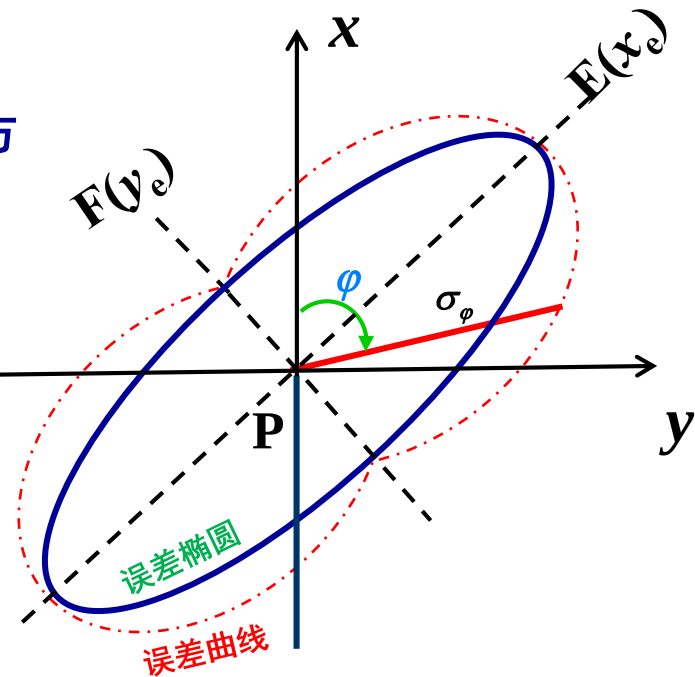
P点点位**误差椭圆**：

以P点为中心，以E、F作为半长轴和半短轴，按一定比例绘制的椭圆。

误差椭圆用以**近似描述**点位中**误差**在不同方向的**分布情况**。

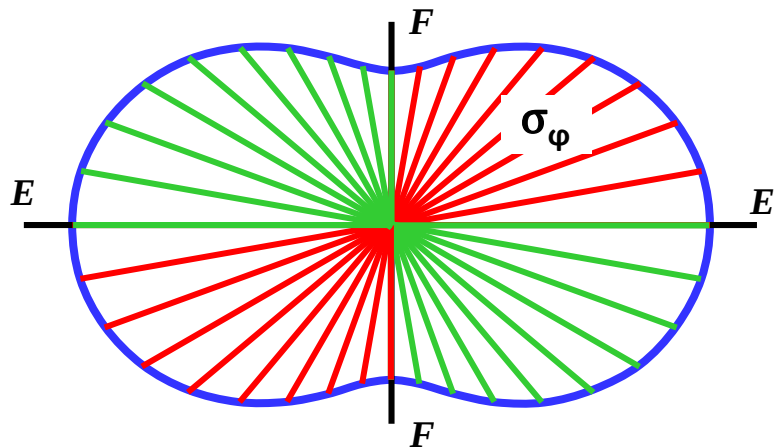
在P- x_e, y_e 坐标系中，误差椭圆的方程为

$$\frac{x_e^2}{E^2} + \frac{y_e^2}{F^2} = 1$$



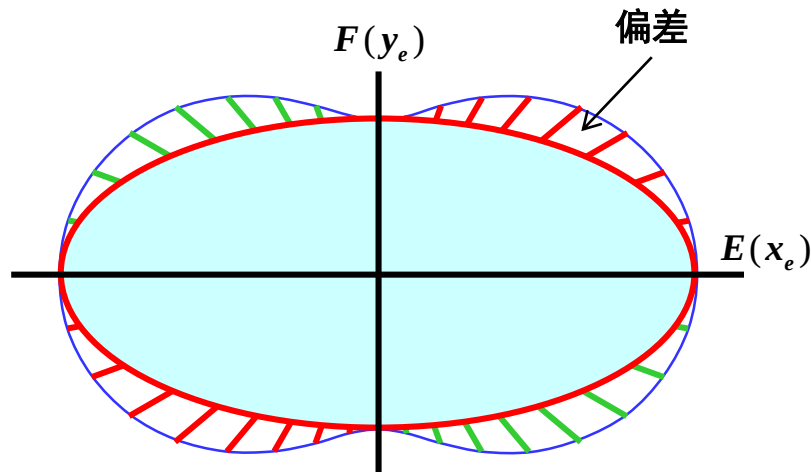
误差椭圆与误差曲线的关系

1) 对点位中误差分布描述的差别



误差曲线 (参考雷斌讲义)

$$\sigma_{\varphi} = f(\varphi) = \sqrt{\sigma_x^2 \cos^2 \varphi + \sigma_y^2 \sin^2 \varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi}$$



误差椭圆

$$\frac{x_e^2}{E^2} + \frac{y_e^2}{F^2} = 1$$

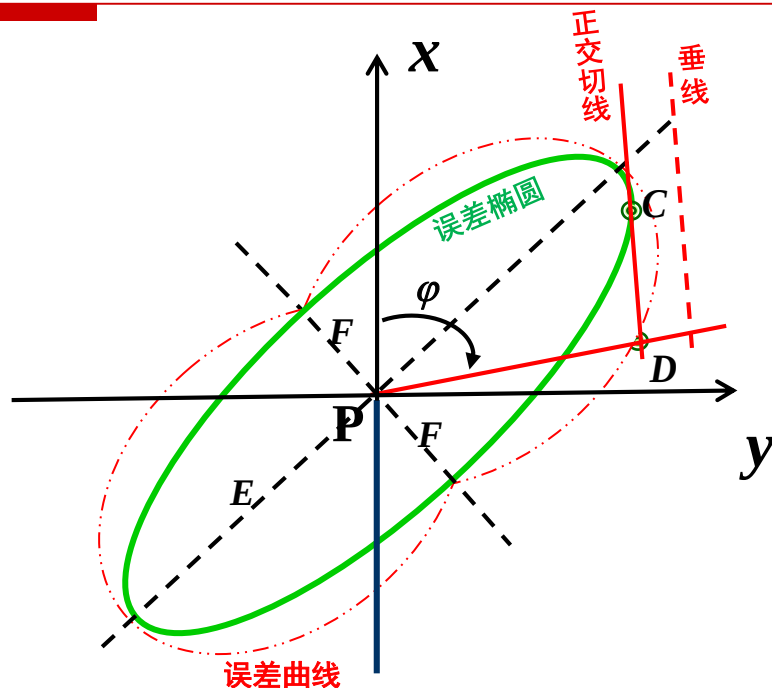
误差椭圆与误差曲线的关系

2) 在误差椭圆上, 求 φ 方向的点位中误差

作图法: 过P点做 φ 方向的直线PD,
做PD的垂线相切于误差椭圆,
切点C、垂足D。

则 $\sigma_{\varphi}=PD$

由此, 提供了一种根据误差椭圆求
点位中误差的作图方法。



3、相对误差椭圆

前面讨论了一点^点的点位精度问题。

下面讨论^点两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 之间相对位置的精度问题。

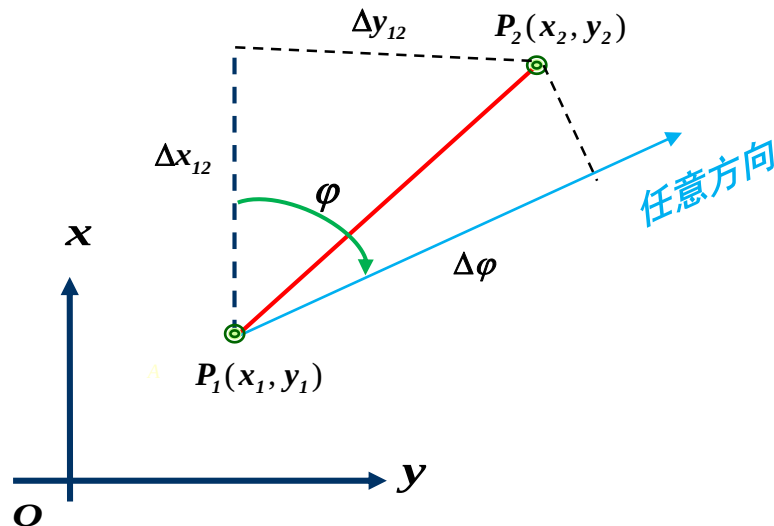
(1) 两点的坐标差与协因数

$$\Delta x_{12} = x_2 - x_1$$

$$\Delta y_{12} = y_2 - y_1$$

坐标差的协因数阵为

$$Q_{\Delta X \Delta X} = \begin{pmatrix} Q_{\Delta x \Delta x} & Q_{\Delta x \Delta y} \\ Q_{\Delta y \Delta x} & Q_{\Delta y \Delta y} \end{pmatrix}$$



3、相对误差椭圆

(2) φ 方向的坐标差、坐标差协因数

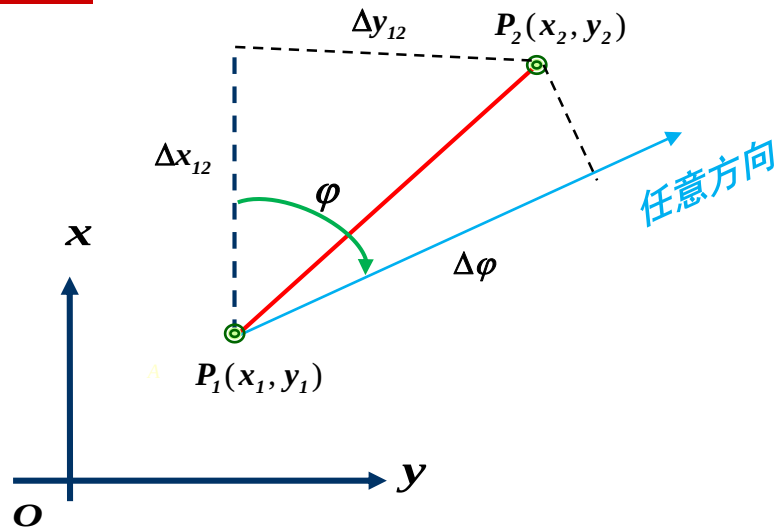
参照单点误差椭圆的元素推求关系，
求两点相对误差椭圆的参数如下：

φ 方向的坐标差、坐标差协因数为

$$\Delta\varphi = \Delta x_{12} \cos \varphi + \Delta y_{12} \sin \varphi$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_{12} \\ \Delta y_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_{\varphi\varphi} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{\Delta x \Delta x} & Q_{\Delta x \Delta y} \\ Q_{\Delta y \Delta x} & Q_{\Delta y \Delta y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= Q_{\Delta x \Delta x} \cos^2 \varphi + Q_{\Delta y \Delta y} \sin^2 \varphi + Q_{\Delta x \Delta y} \sin 2\varphi \end{aligned}$$



3、相对误差椭圆

(3) φ 方向的**相对点位方差**，即 $\Delta\varphi$ 的方差

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi}^2 &= \sigma_0^2 Q_{\varphi\varphi} \\ &= \sigma_{\Delta x}^2 \cos^2 \varphi + \sigma_{\Delta y}^2 \sin^2 \varphi + \sigma_{\Delta x \Delta y} \sin 2\varphi\end{aligned}$$

(4) 相对点位方差的**极大值** E_{12}^2 、**极小值** F_{12}^2

$$\begin{aligned}E_{12}^2 &= \sigma_0^2 Q_{EE} = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} + K) \\ F_{12}^2 &= \sigma_0^2 Q_{FF} = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} - K) \\ K &= \sqrt{(Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y})^2 + 4Q_{\Delta x \Delta y}^2}\end{aligned}$$

极值方向方位角为

$$\tan \varphi_E = \frac{Q_{\Delta x \Delta y}}{Q_{EE} - Q_{\Delta y \Delta y}} \quad \tan \varphi_F = \frac{Q_{\Delta x \Delta y}}{Q_{FF} - Q_{\Delta y \Delta y}}$$

以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！

第十章 点位精度与误差椭圆

§10-1 点位误差

§10-2 点位方差

§10-3 误差曲线与误差椭圆

§10-4 计算示例

例1：单点误差椭圆

例2：两点相对误差椭圆

1、误差椭圆计算示例-单点误差椭圆

例1：平面控制网中，某待定点坐标的协因数阵为： $Q_{\hat{\hat{x}}\hat{\hat{x}}} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.236 & -0.314 \\ -0.314 & 1.192 \end{pmatrix}$
 $\hat{\sigma}_0 = 1$ 。求误差椭圆参数 $\hat{E}$ 、 $\hat{F}$ 、 φ_E 。

解：依题意

$$K = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} = \sqrt{0.044^2 + 4 \times (-0.314)^2} = 0.630$$

$$Q_{EE} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} + K) = \frac{1}{2}(1.236 + 1.192 + 0.630) = 1.528$$

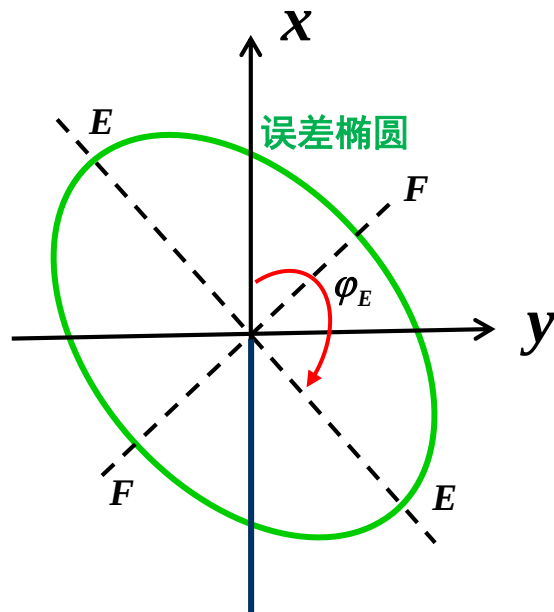
$$Q_{FF} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} - K) = \frac{1}{2}(1.236 + 1.192 - 0.630) = 0.899$$

$$\hat{E} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{EE}} = 1 \times \sqrt{1.528} = 1.24$$

$$\hat{F} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{FF}} = 1 \times \sqrt{0.899} = 0.95$$

$$\tan \varphi_E = \frac{Q_{xy}}{Q_{EE} - Q_{yy}} = -0.932 \quad \tan \varphi_F = \frac{Q_{xy}}{Q_{FF} - Q_{yy}} = 1.073$$

$$\varphi_E = 137^\circ 01' \text{ 或 } 317^\circ 01' \quad \varphi_F = 47^\circ 01' \text{ 或 } 227^\circ 01'$$



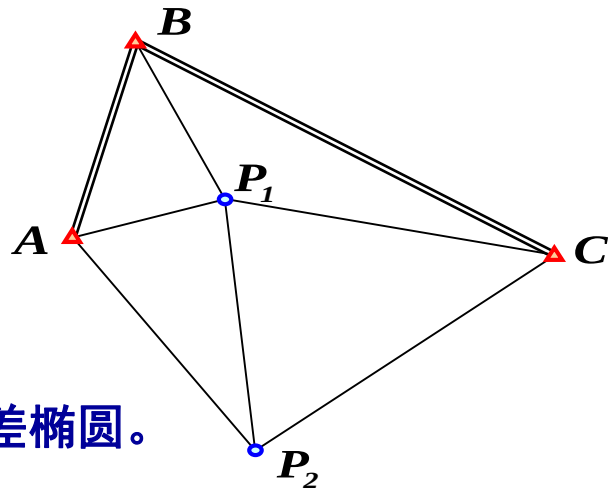
2、误差椭圆计算示例-相对误差椭圆

例2：两待定点坐标及协因数阵为：

$$\hat{X} = (\hat{x}_{P_1} \quad \hat{y}_{P_1} \quad \hat{x}_{P_2} \quad \hat{y}_{P_2})^T \quad Q_{\hat{X}\hat{X}} = \begin{pmatrix} 10.61 & 0.81 & -0.60 & 1.12 \\ & 13.48 & 0.52 & 0.94 \\ & & 11.73 & -2.86 \\ \text{对称} & & & 14.21 \end{pmatrix}$$

协因数单位： $cm^2/(\prime)^2$ $\hat{\sigma}_0 = \pm 2.4''$

试计算作图： P_1 、 P_2 点误差椭圆；两点间的相对误差椭圆。



（此例及解题，来源于雷斌老师讲义）

解: (1) 计算 P_1 点的误差椭圆元素

$$K_1 = \sqrt{(Q_{x_1x_1} - Q_{y_1y_1})^2 + 4Q_{x_1y_1}^2} = 3.296$$

$$Q_{EE} = \frac{1}{2}(Q_{x_1x_1} + Q_{y_1y_1} + K) = 13.70$$

$$Q_{FF} = \frac{1}{2}(Q_{x_1x_1} + Q_{y_1y_1} - K) = 10.40$$

$$E_1 = \sigma_0 \sqrt{Q_{EE}} = 8.9(\text{cm})$$

$$F_1 = \sigma_0 \sqrt{Q_{FF}} = 7.7(\text{cm})$$

$$\tan \varphi_{E_1} = \frac{Q_{x_1y_1}}{Q_{EE} - Q_{y_1y_1}} = \frac{0.81}{13.70 - 13.48} = 3.682$$

$$\varphi_{E_1} = 74^\circ 48' \text{ 或 } 254^\circ 48'$$

(2) 计算 P_2 点的误差椭圆元素

$$K_2 = \sqrt{(Q_{x_2x_2} - Q_{y_2y_2})^2 + 4Q_{x_2y_2}^2} = 6.234$$

$$Q_{EE} = \frac{1}{2}(Q_{x_2x_2} + Q_{y_2y_2} + K) = 16.085$$

$$Q_{FF} = \frac{1}{2}(Q_{x_2x_2} + Q_{y_2y_2} - K) = 9.853$$

$$E_2 = \sigma_0 \sqrt{Q_{EE}} = 9.6(\text{cm})$$

$$F_2 = \sigma_0 \sqrt{Q_{FF}} = 7.5(\text{cm})$$

$$\tan \varphi_{E_2} = \frac{Q_{x_2y_2}}{Q_{EE} - Q_{y_2y_2}} = \frac{-2.86}{16.085 - 14.21} = -1.493$$

$$\varphi_{E_2} = 125^\circ 40' \text{ 或 } 305^\circ 40'$$

(3) 计算 P_1 与 P_2 点间的相对误差椭圆元素

$$\begin{pmatrix} Q_{\Delta x \Delta x} & Q_{\Delta x \Delta y} \\ Q_{\Delta y \Delta x} & Q_{\Delta y \Delta y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} - 2Q_{x_1 x_2} & Q_{x_1 y_1} - Q_{x_1 y_2} - Q_{x_2 y_1} + Q_{x_2 y_2} \\ Q_{y_1 x_1} - Q_{y_2 x_1} - Q_{y_1 x_2} + Q_{y_2 x_2} & Q_{y_1 y_1} + Q_{y_2 y_2} - 2Q_{y_1 y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23.54 & -3.69 \\ -3.69 & 25.81 \end{pmatrix}$$

$$K_{12} = \sqrt{(Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y})^2 + 4Q_{\Delta x \Delta y}^2} = 7.7212$$

$$Q_{EE} = \frac{1}{2}(Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} + K) = 28.53 \quad Q_{FF} = \frac{1}{2}(Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} - K) = 20.82$$

$$E_{12} = \sigma_0 \sqrt{Q_{EE}} = 12.82 (\text{cm})$$

$$F_{12} = \sigma_0 \sqrt{Q_{FF}} = 10.95 (\text{cm})$$

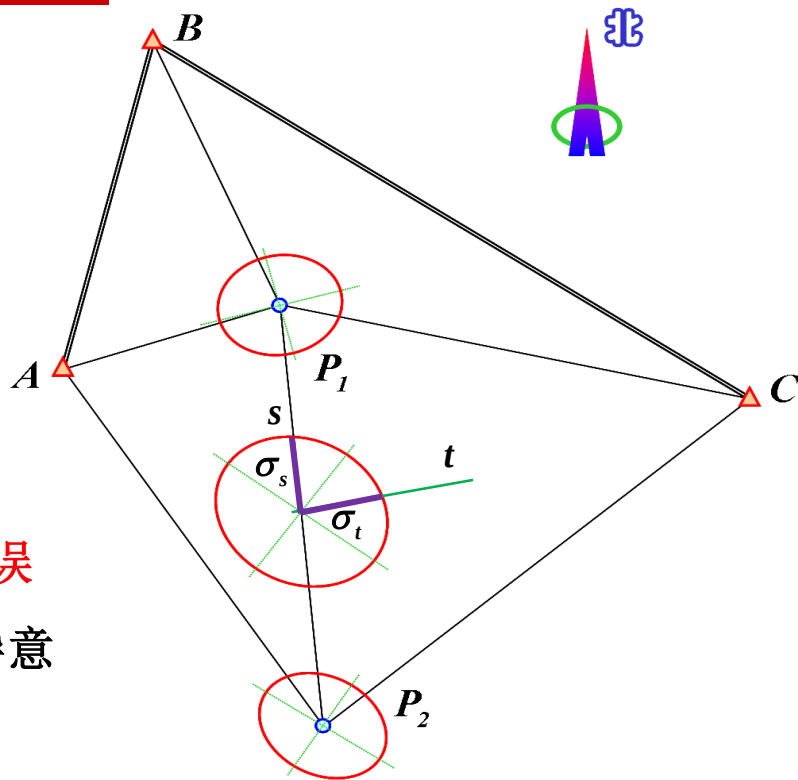
$$\tan \varphi_E = \frac{Q_{\Delta x \Delta y}}{Q_{EE} - Q_{\Delta y \Delta y}} = -1.36$$

$$\varphi_{E_{12}} = 126^\circ 24' \text{ 或 } 306^\circ 24'$$

(4) 绘制单点误差椭圆和相对误差椭圆

- 以一定比例尺，在待定点上绘单点误差椭圆。
- 按同比例尺在两待定点连线中点，绘相对误差椭圆

根据相对误差椭圆，可求 P_1P_2 方向的纵向误差 σ_s 和横向误差 σ_t 。对实际工程有指导意义。



小结

- 1) 点位方差是描述观测成果点位精度的重要指标，方差分布具有方向性，用 σ_{φ}^2 表示。
- 2) 误差曲线与误差椭圆，是描述或近似描述点位中误差在不同方向分布的图形。直观、方便、重要。

作 业： 习题十，第1，4，6，8，10题

以上是本节课的内容。

同学们，下节课再见！
