

误差理论与测量平差基础 课程设计

李 军 教授

戴华阳 教授

地球科学与测绘工程学院

课程目标

本课程旨在通过实践加深学生对误差理论与测量平差知识的理解，培养利用计算机编程实现平差解算的能力，锻炼解决测量平差综合问题的能力，为从事测绘工作打下基础。通过本课程的教学，达到以下课程目标：

1. 熟悉一种编程语言的基础知识，并学会运用计算机编程实现四种测量平差方法的解算；
2. 通过五个课程设计实例，掌握解决测量平差综合问题所应具备的思路梳理、方案设计、代码编写、程序调试等能力；
3. 通过动手实践巩固对误差理论与测量平差知识的理解，加深对各知识点运用场景的印象，并启发创造性专业思维。

大纲

- **Matlab基本知识**
 - Matlab软件介绍
 - 变量、运算符、矩阵
- **Matlab在测量平差计算中的应用**
 - 条件平差
 - 间接平差
- **课程设计实例的内容和要求**

1 Matlab基础知识

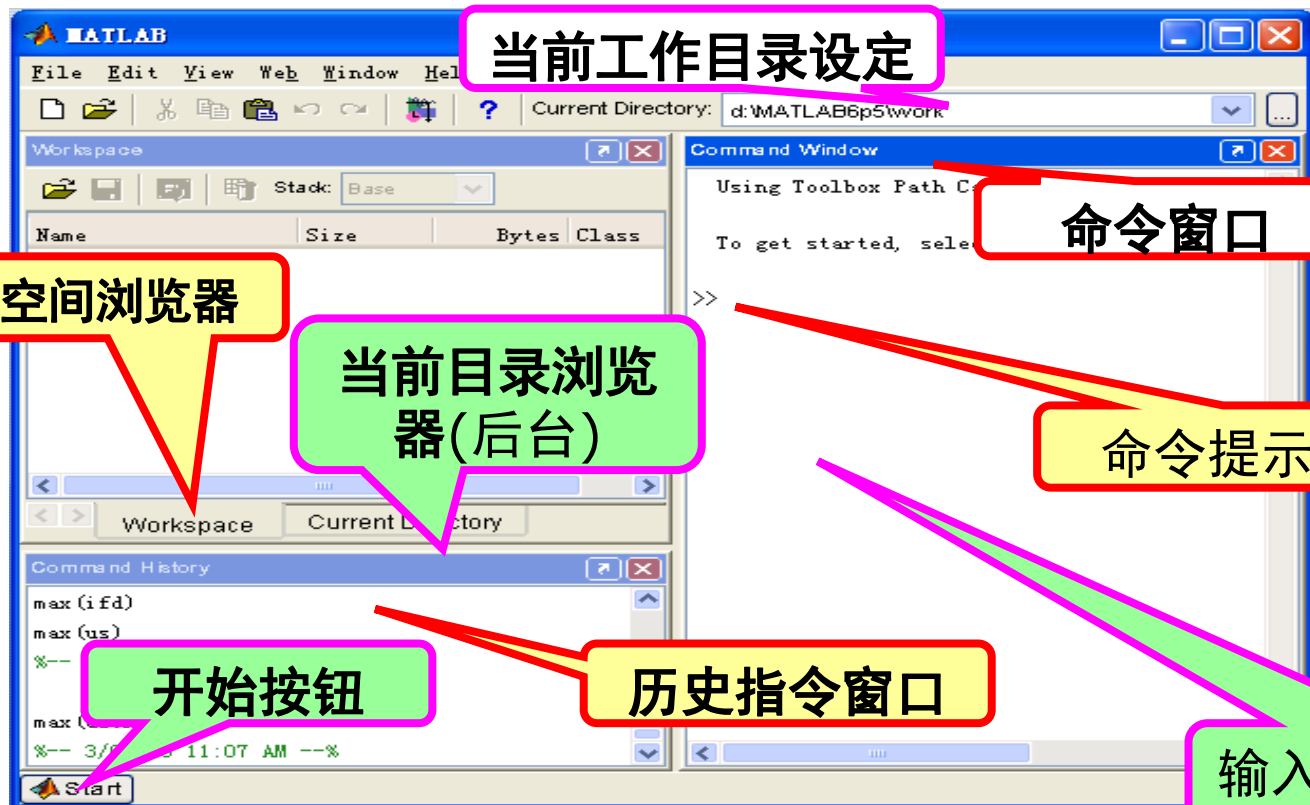
1.1 Matlab软件介绍

- **Matlab**软件是由美国Math works公司推出的用于数值计算和图形处理的科学计算系统。Matlab是英文Matrix Laboratory（矩阵实验室）的缩写，被誉为“巨人肩上的工具”。
- Matlab软件成为对数值、线性代数以及其它一些应用数学课程进行辅助教学的有力工具；在工程技术界，Matlab软件也被用来构建与分析一些实际课题的数学模型。

1.2 为什么选择Matlab ?

- 1、是一种简单易学的语言
- 2、具有强大的数值和矩阵计算功能
- 3、具有强大的图形功能

1.3 Matlab操作界面



1.4 变量、运算符

MATLAB中变量的**命名规则**是：

- (1) 变量名必须是不含空格的单个词；
- (2) 变量名区分大小写；
- (3) 变量名最多不超过19个字符；
- (4) 变量名必须以字母打头，之后可以是任意字母、数字或下划线，变量名中不允许使用标点符号。

1.4 变量、运算符

变量的使用

```
>> xy=1;
```

%对变量赋值

```
>> xy
```

%查看变量xy的当前数值

```
xy =
```

```
1
```

```
>> clear xy
```

%删除变量xy

```
>> xy
```

%这时变量xy已经不存在了

```
??? Undefined function or variable 'xy' . %报错
```

1.4 变量、运算符

数学函数

函 数	名 称	函 数	名 称
<code>sin(x)</code>	正弦函数	<code>asin(x)</code>	反正弦函数
<code>cos(x)</code>	余弦函数	<code>acos(x)</code>	反余弦函数
<code>tan(x)</code>	正切函数	<code>atan(x)</code>	反正切函数
<code>abs(x)</code>	绝对值	<code>max(x)</code>	最大值
<code>min(x)</code>	最小值	<code>sum(x)</code>	元素的总和
<code>sqrt(x)</code>	开平方	<code>exp(x)</code>	以 e 为底的指数
<code>log(x)</code>	自然对数	<code>log₁₀(x)</code>	以 10 为底的对数
<code>sign(x)</code>	符号函数	<code>fix(x)</code>	取整

1.5 矩阵

创建矩阵

通过直接输入矩阵的元素构造矩阵：

- 用中括号[]把所有矩阵元素括起来
- 同一行的不同数据元素之间用空格或逗号间隔
- 用分号（；）或回车符表示一行的结束
- 数据元素可以是表达式，系统将自动计算结果

1.5 矩阵

例：输入矩阵A、B的值

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

```
>>A=[1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12; 13 14 15 16]
```

```
>>B=[1,sqrt(25),9,13
```

```
2,6,10,7*2
```

```
3+sin(pi),7,11,15
```

```
4,abs(-8),12,16]
```

1.5 矩阵

矩阵下标与子矩阵提取

- $A(m, n)$ 提取第 m 行，第 n 列元素
- $A(:, n)$ 提取第 n 列元素
- $A(m, :)$ 提取第 m 行元素
- $A(m1:m2, n1:n2)$ 提取第 $m1$ 行到第 $m2$ 行和第 $n1$ 列到第 $n2$ 列的所有元素
- $A(m:end, n)$ 提取从第 m 行到最末行和第 n 列的子块
- $A(:)$ 得到一个长列矢量，该矢量的元素按矩阵的列进行排列

1.5 矩阵

创建对角阵

- 定义向量 $V = [1\ 2\ 3\ 4\ 5]$;
- 定义对角阵 $M = \text{diag}(V)$;

$M =$

1	0	0	0	0
0	2	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	4	0
0	0	0	0	5

1.5 矩阵

修改矩阵A中元素的数值

>>M(1,1)=0; M(2,2)=22; M(4,4)=cos(0);

则矩阵变为:

M =

0	0	0	0	0
0	22	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	5

1.5 矩阵

矩阵的算术运算

1. 矩阵的加减运算： $+$ (加)、 $-$ (减)
2. 矩阵乘法： $*$ (乘)
3. 矩阵转置： $'$ (转置运算符)
4. 矩阵求逆： $\text{inv}()$
5. 矩阵除法： $/$ (右除)、 $\backslash$ (左除)
6. 矩阵的乘方： $^$ (乘方)

1.5 矩阵

求逆矩阵

```
>> X=[1 2 3 0; 5 6 0 8; 9 0 11 12; 0 14 15 16];
```

```
>> Y=inv(X)
```

```
Y =
```

```
0.2299    0.0908    0.0351   -0.0717  
0.1940    0.0798   -0.0659    0.0095  
0.1274   -0.0835    0.0322    0.0176  
-0.2892    0.0084    0.0275    0.0377
```

```
>> Y*X
```

%矩阵与其逆阵相乘结果是单位矩阵

```
ans =
```

```
1.0000    0          0          0  
0         1.0000    0          0  
0         0         1.0000    0  
0         0         0         1.0000
```

```
>> X*Y
```

%矩阵的逆阵是唯一的

```
ans =
```

```
1.0000    0          0          0  
0         1.0000    0          0  
0         0         1.0000    0  
0         0         0         1.0000
```

1.6 函数

函数文件的格式是：

```
function [输出变量] = 函数名称(输入变量)
```

```
% 注释
```

```
函数体
```

```
end
```

```
function [s] = eg_sum( n )
```

```
% calculate the sum of 1..n
```

```
s = 0;
```

```
for i = 1:n
```

```
s = s + i;
```

```
end
```

大纲

- **Matlab基本知识**
 - Matlab软件介绍
 - 变量、运算符、矩阵
- **Matlab在测量平差计算中的应用**
 - 条件平差
 - 间接平差
- **课程设计实例的内容和要求**

计算机编程在测量平差中的作用

计算机**能**帮我们：

- 执行复杂的运算过程，提高效率，如：矩阵运算、三角函数.....
- 实现求解过程的自动化，提高便利度，如：自动读取原始数据、批处理求解.....
- 以丰富多样的形式反馈结果，增加美观度，如：定制界面、输出图形化结果.....

计算机**不能**帮我们：

- 制定解决问题的策略，如：判断必要观测数、列条件/误差方程、构建变量间的函数关系.....

计算机不是万能的，但没有计算机是万万不能的！！！！

2.1 应用matlab编程实现条件平差计算

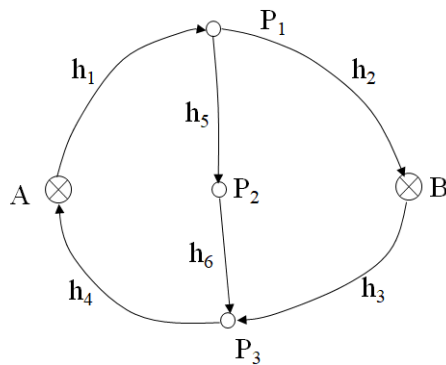
条件平差公式汇编

- 条件方程: $AV + W = 0$
- 法 方 程: $N_{aa}K + W = 0$ 其中 $N_{aa} = AQA^T$
- 其 解 为: $K = N_{aa}^{-1}W$
- 改正数方程: $V = P^{-1}A^TK = QA^TK$
- 观测量平差值: $\hat{L} = L + V$
- 单位权方差的估值: $\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^TPV}{r}}$

平差值函数F的中误差: $\hat{\sigma}_F = \hat{\sigma}_0\sqrt{Q_{FF}}$

条件平差

如图所示水准网，起算数据为 $H_a=150.372\text{m}$ ， $H_b=181.739\text{m}$ 观测数据列于下表中。试按条件平差法求出观测值的平差值，观测值平差值的协因数阵及P2点高程的平差值及其中误差。



编号	1	2	3	4	5	6
h/m	14.301	17.074	-20.22	-11.159	12.821	-15.961
S/km	2.2	3.1	2.8	3.7	2.7	2.1

条件平差的Matlab求解

% (1) 输入已知条件

% h为观测高差, s为路线距离

n=6; t=3;

h=[14.301 17.074 -20.220 -11.159 12.821 -15.961]';

s=[2.2 3.1 2.8 3.7 2.7 2.1]';

Ha=150.372;

Hb=181.739;

% (2) 列出条件方程, $AV+W=0$, 得出系数矩阵 A, W的值

r=n-t

A=[1 0 0 1 1 1;

0 1 1 0 -1 -1;

1 1 0 0 0 0];

W=[2 -6 8]'; %单位是mm

条件平差的Matlab求解

% (3) 定权, 令 $C=5$, 即以5km观测高差为单位权,

$C=5$;

$P=\text{diag}(C./s)$;

$Q=\text{inv}(P)$; % Q 与 P 互为逆矩阵

% (4) 求解

$N_{aa}=A*Q*A'$; % N_{aa} 为法方程系数阵

$K=-\text{inv}(N_{aa})*W$; % K 是法方程的解,法方程 $N_{aa}K+W=0$

$V=Q*A'*K$; % 利用改正数方程, 计算改正数

$hp=h+V*0.001$; % 观测值平差值向量

条件平差的Matlab求解

% 精度评定

$\sigma_0 = \sqrt{V'PV/r}$;

$Q_{hp} = Q - Q A' \text{inv}(N_{aa}) A Q$;

$H_2 = H_a + hp(1,1) + hp(5,1)$;

$F = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$;

$Q_{H2p} = F Q_{hp} F'$;

$\sigma_{mah2p} = \sigma_0 \sqrt{Q_{H2p}}$;

% 单位权中误差的估值7.9773

% 观测值平差值的协因数阵

% P2点高程的平差值

% P2点高程平差值的权函数式系数向量

% P2点高程平差值的协因数

% P2点高程平差值的中误差

2.2 应用matlab编程实现间接平差计算

间接平差公式汇编

误差方程: $V = B \hat{x} - l$

法方程: $B^T P B \hat{x} - B^T P l = 0$

其解为: $\hat{x} = (B^T P B)^{-1} B^T P l = N_{BB}^{-1} W$

观测量和参数的平差值: $\hat{L} = L + V \quad \hat{X} = X^0 + \hat{x}$

单位权中误差: $\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}$

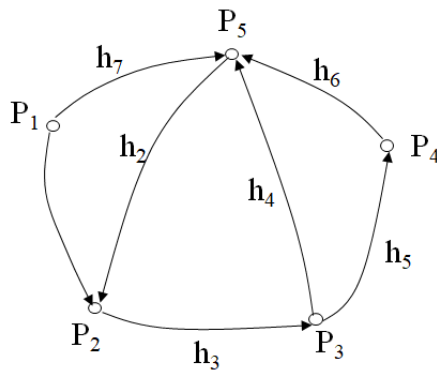
参数平差值的协因数阵: $Q_{\hat{X}\hat{X}} = N_{BB}^{-1} = (B^T P B)^{-1}$

观测值平差值的协因数阵: $Q_{\hat{L}\hat{L}} = B N_{BB}^{-1} B^T$

各个观测值平差值的中误差估值分别为: $\hat{\sigma}_{\hat{L}\hat{L}} = \hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{Q_{\hat{L}\hat{L}}}$

间接平差

如图所示水准网，其中所有水准点均为未知点。各水准路线高差观测值及水准路线长列于下表中。现假设P1点的高程为100.00m，试求其余个点的高程及中误差



编号	1	2	3	4	5	6	7
h/m	10.286	-10.069	-4.954	15.02	1.227	13.801	20.344
S/km	4.7	3.1	3.5	3.2	4.4	3.8	4

大纲

- **Matlab基本知识**
 - Matlab软件介绍
 - 变量、运算符、矩阵
- **Matlab在测量平差计算中的应用**
 - 条件平差
 - 间接平差
- **课程设计内容和要求**

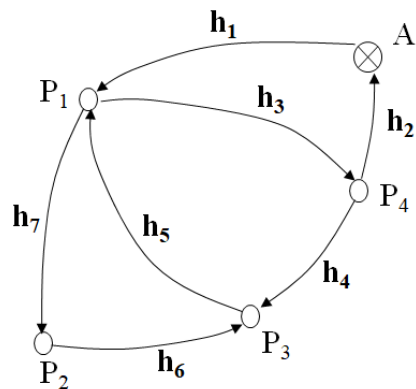
课程设计内容和要求

- 内容：
- （1）水准网条件平差编程实现
 - （2）水准网间接平差编程实现
 - （3）三角网间接平差编程实现
 - （4）测量精确度模拟器编程实现
 - （5）误差曲线和椭圆绘制程序实现

要求：提交程序可执行源代码（电子文件），课程设计报告电子版和纸质版。具体要求见课程设计说明文档。

设计作业 (1)

在图1-1所示的水准网中，点A的高程 $H_A=10.000\text{m}$ ，P1-P4为待定点，观测高差及路线长度为如表1-1，设P2点高程平差值为参数，编程实现对此水准网的条件平差，最终求得观测值的改正数及平差值，平差后权方差及P2点高程平差值的中误差。



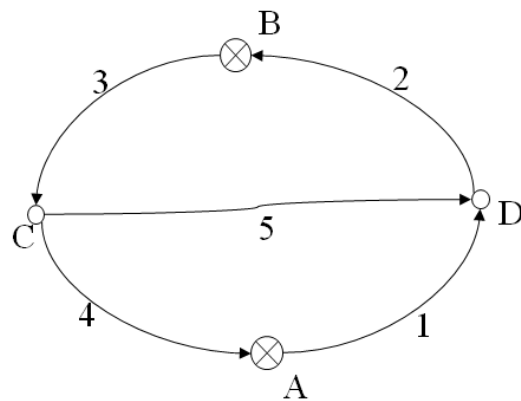
观测高差		路线长度	
h_1	1.270m	S_1	2km
h_2	-3.380m	S_2	2km
h_3	2.114m	S_3	1km
h_4	1.613m	S_4	2km
h_5	-3.721m	S_5	1km
h_6	2.931m	S_6	2km
h_7	-0.782m	S_7	2km

注意：P2点高程平差值可以有多种计算方法，试比较不同计算方法时得到的中误差大小。

设计作业 (2)

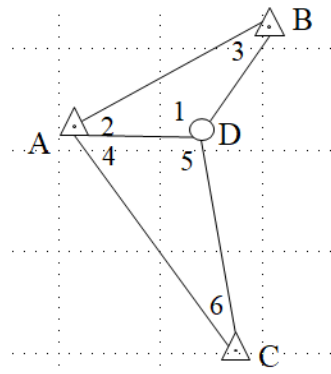
水准网中，A,B为已知点， $H_A=5.530\text{m}$ ， $H_B=8.220\text{m}$ ，观测高差和路线长度如表2-1，用间接平差方法编程实现求：1) 待定点C、D最或是高程。2) 平差后C、D间高差的协因数 Q_φ 及中误差 σ_φ 。

观测高差		路线长度	
h_1	1.157m	S_1	2km
h_2	1.532m	S_2	2km
h_3	-2.025m	S_3	2km
h_4	-0.663m	S_4	2km
h_5	0.498m	S_5	4km



设计作业 (3)

在右图中，同精度测得六个角度L1-L6，已知点A、B、C的起算数据，试按间接平差方法计算D点的坐标。

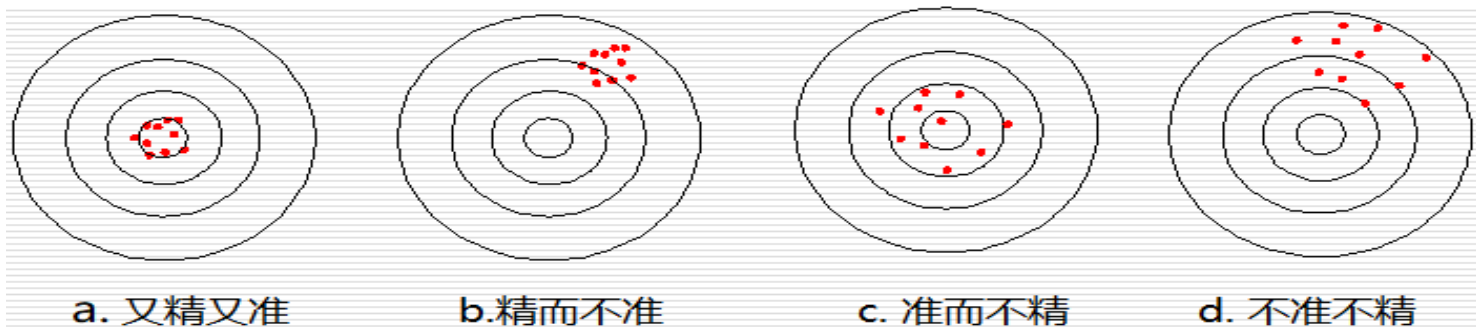


角号	观测值 L_i ° ' "
1	106 50 42.2
2	30 52 44.0
3	42 16 39.1
4	28 26 05.0
5	127 48 41.2
6	23 45 16.2

点名	坐标 (m)		坐标方位角 α ° ' "	边长S (m)
	X	Y		
B	13737.37	10501.92		
A	8986.68	5705.03	225 16 38.1	6751.24
C	6642.27	14711.75	104 35 24.3	9306.84

注意：尽量将相同计算过程写成函数，方便多次调用，如角度转弧度，坐标反算，...

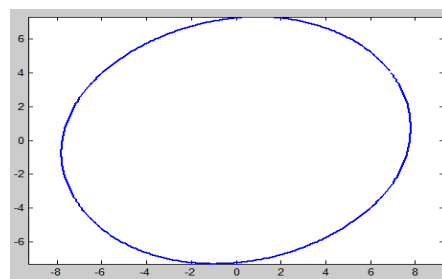
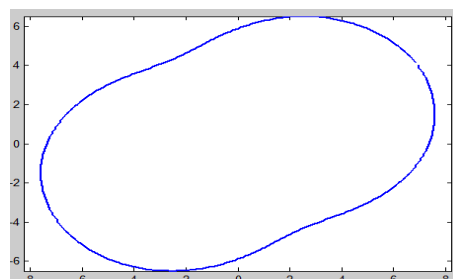
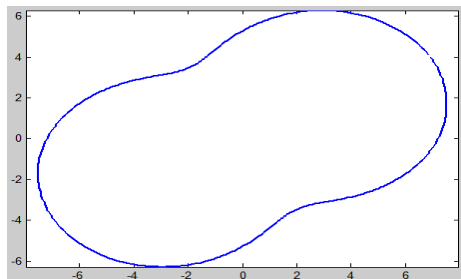
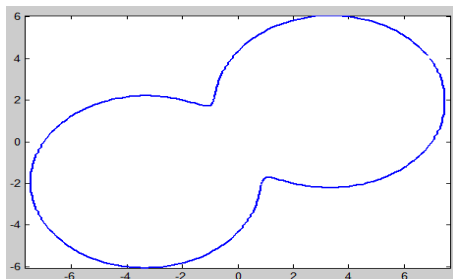
设计作业 (4)



理解系统误差（用偏差 ϵ 衡量）和偶然误差（用中误差 σ 衡量）的差别，然后使用matlab编写小程序，该程序模拟具有不同 ϵ 和 σ 值的原始点分布，并按照上述图像方式显示。注意：

- (1) 每次模拟出的点数据具有随机性，即使相同的 ϵ 和 σ 值也需产生不同数据；
- (2) 程序有界面，一侧可供用户输入参数，另一侧显示点分布效果；
- (3) 背景圆圈为黑色，点数据用红色显示；
- (4) σ 为点位中误差，可使生成点数据的x和y轴方向点位中误差相等；

设计作业 (5)



理解误差曲线和误差椭圆的概念和特性，然后使用matlab编写小程序，该程序根据误差椭圆参数 φ_E 、 E 、 F 及点坐标 x 、 y 画出相应的误差椭圆和误差曲线（参照上述方式显示）。注意：

- (1) 程序有界面，一侧可供用户输入参数，另一侧显示曲线和椭圆效果；
- (2) 误差曲线用蓝色线条，误差椭圆用红色线条显示；
- (3) 考虑先描绘出 $\varphi_E = 0^\circ$ 及 $x=y=0$ 时的曲线和椭圆，再根据角度和坐标进行旋转和平移；

谢谢