
误差理论与测量平差基础

主讲： 戴华阳 教授
中国矿业大学（北京）

课程总结—科学思路和方法

本课程的科学思想和研究方法是：基于数学原理，认识和处理观测误差问题。主要体现为：

- 1) 从统计学视角，认识（看待）误差的随机特性 $\tilde{L} - \Delta = L \sim N(\mu, \sigma^2)$ ；
 - 2) 用观测值样本，估计（猜测）观测值变量的分布参数 $\mu = \tilde{L}$ ；
 - 3) 按最小二乘原则，求解（确定）参数/真值的最优估值 $\hat{L}$ 。
-

课程总结—科学思路和方法

- 1、误差与误差问题
 - 2、误差分类的意义
 - 3、偶然误差的变量化与离散化
 - 4、平差求最优估值 $\hat{L}$ 的思路和方法
 - 5、平差中的数学手段与工程简化
 - 6、特殊情形下的数据处理—近代平差
-

1、误差与误差问题

1) 误差定义：误差是观测值与其客观真值的偏差。

$$\Omega = \tilde{L} - L$$

误差值 $\Omega = 1723 - 1720 = 3 \text{ (mm)}$

2) 误差来源：误差来源于观测过程的三个方面：观测者、仪器、环境
误差不可避免。

误差值是多个影响因素的综合反映。

3) 误差问题：1) 误差的传播、扩大化； $\Omega_l \rightarrow \Omega_s$
2) 观测值不闭合（数据矛盾），几何位置不能确定。

$$L_1 + L_2 + L_3 - 180^\circ \neq 0$$

因此，观测值不能直接应用，需要处理。

误差复杂，如何处理？先分类，再评价处理

2、误差分类的意义

1) 误差分类的目的和意义：在于方便处理误差

2) 误差按影响性质分为三类：

$$\Omega = \varepsilon + \Delta + \Delta_{\text{粗}}$$

3) 观测质量评价 4) 误差处理方式顺序

系统误差 ε ：误差有规律

如尺长误差

偶然误差 Δ ：单个误差无规律，

如照准误差

粗差 $\Delta_{\text{粗}}$ ：读错记错，超偶然误差

准确度

精度

可靠性

再处理 ε ：消减校正

最后处理 Δ ：平差

先处理 $\Delta_{\text{粗}}$ ：舍弃或另处

3、偶然误差的变量化与离散化

视角的2次变化

1) 偶然误差值的分布特性

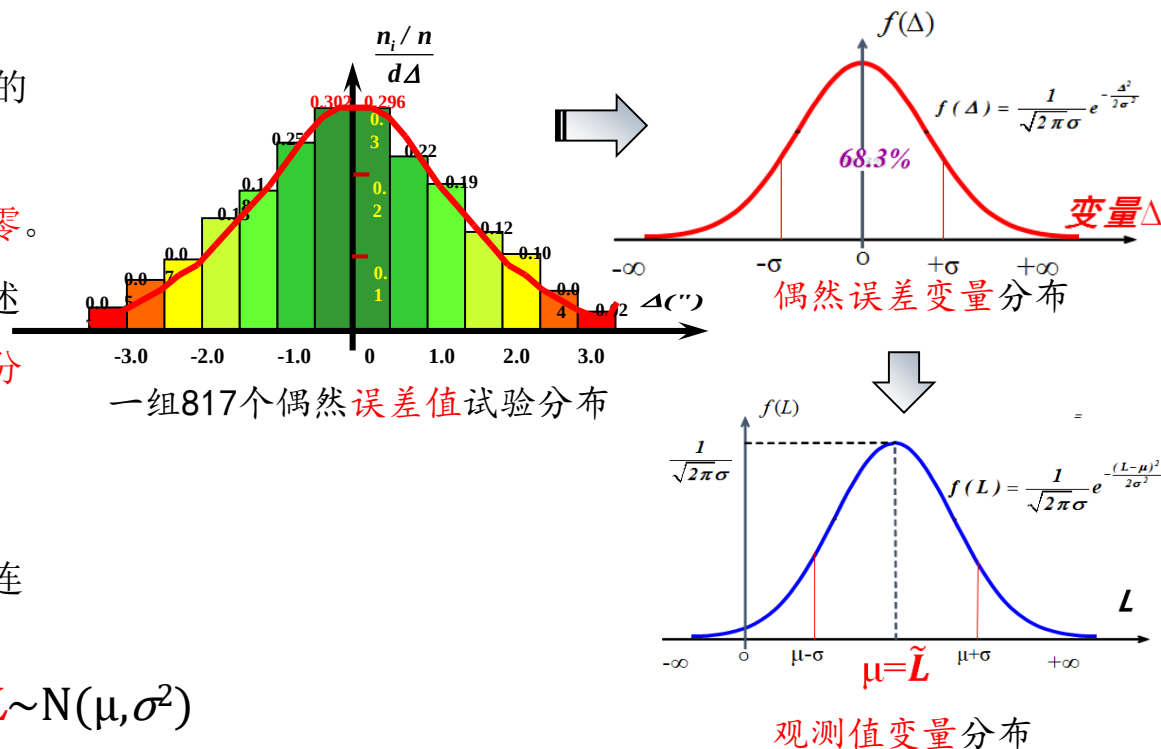
(大量误差的大小与其出现概率的关系) +/- 的分布对称、误差集中于小误差、误差有界限、均值为零。

2) 偶然误差变量化: 基于上述试验特性, 偶然误差引申为正态分布的连续型随机变量

$$\Delta \sim N(0, \sigma^2),$$

样本有限的误差值, 取值无限的连续型随机变量。

3) 观测值变量化 $\tilde{L} - \Delta = L \sim N(\mu, \sigma^2)$



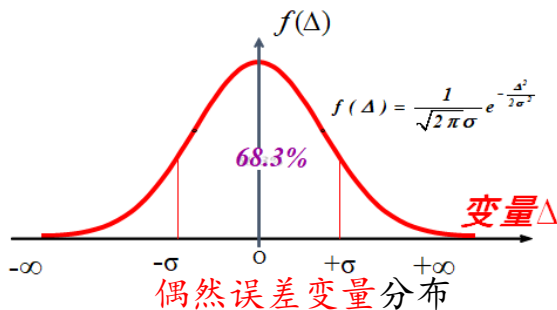
3、偶然误差的变量化与离散化

视角的2次变化

$$\tilde{L} - \Delta = L \sim N(\mu, \sigma^2)$$

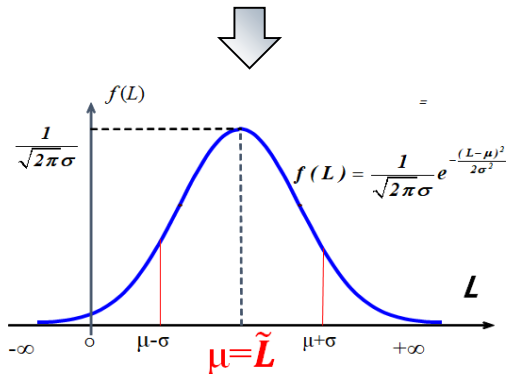
4) 平差的任务：求参数 $\mu = \tilde{L}$ 的估值

这是参数估计的问题：用样本值估算分布参数，存在多种方法，需要最优化。



5) 观测质量评价，求参数 $\sigma^2 = D(L)$ 方差的估值，误差变量的离散化，以便联系误差值

$$\sigma^2 = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^2$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^2$$



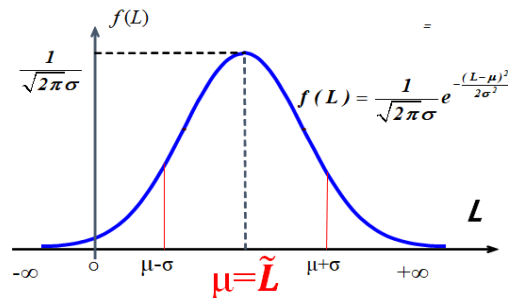
误差、观测值变量化是认识误差的关键，是解决误差问题的起点

观测值变量分布

4、求最优估值 $\hat{L}$ 的思路和方法

1) 求估值 $\hat{L}$ 的思路 (参数 $\mu = \tilde{L}$ 的估值) **P-平差随机模型**

- ① $\hat{L} = L + V$ 以 L 为基础, 对 L 修正
- ② 寻找最优估值方法 - $V^T P V = \min$ **平差原则**
- ③ $\hat{L}$ 应满足 $\tilde{L}$ 的几何关系 **平差函数模型**



观测值变量分布

2) 引入几何参数 $\hat{X}$ (为了方便) **建立函数模型**

参数个数 u 、函数模型4种、基本平差方法4种:

- ① $u = 0$, 条件方程, 条件平差
- ② $u < t$, 附有参数的条件方程, 附参条件平差
- ③ $u = t$, 误差方程, 间接平差
- ④ $u > t$, 附有限制条件的误差方程, 附限间接平差
- ⑤ u 任意, 附有限制条件的条件方程, **概括平差**

以上方法的前提:
① L 只含偶然误差 Δ
② $L \sim N(\mu, \sigma^2)$
需要进行假设检验

5、平差的数学手段+工程简化

- 1) 用可能性手段描述偶然误差的随机特性，视角不是固定的
- 2) 估算法“猜测”-最小二乘原则，是课程的基调，不是确定性计算，而是可能性估算。
- 3) 矩阵表示法-是简化、科学和规律性的表达手段。
- 4) 线性化，对复杂函数关系的简化，贯穿全课。如，线性最优的无偏估计，可行（满足工程精度）且必要。

$$f(\hat{L}, \hat{X}) = A(\hat{L} - L) + (B\hat{X} - X^0) + f(L, X^0)$$

线性化位置： $\hat{L} = L + V$, $\hat{X} = X^0 + \hat{x}$

6、测绘新技术及特殊情形下的数据处理

—近代平差

1) 秩亏自由网平差

缺少足够起算数据（基础不稳定），矩阵广义逆

2) 最小二乘配置与滤波

引入参数包含非随机参数 X 、随机参数 Y

3) 稳健估计

包含小型粗差，可靠性分析

课程启示

本课程基于数学原理认识和处理观测误差问题。数学是自然科学的基础，是解释自然、解决复杂科学问题的钥匙。

科学之美：机理揭示明确透亮；推理描述合理简明。

科学的价值：揭示、启迪、联想、应用。

爱科学、爱学习，让我们更明智！

苏轼《和董传留别》：

粗缯_{zeng}大布裹生涯，腹有诗书气自华。

祝同学们：愉快，进步！

再见
